MANUAL COMPLETO

DE

INSTRUCCION PRIMARIA,

ELEMENTAL Y SUPERIOR.

Esta obra es propiedad del Autor, quien denunciará ante la ley cuantos ejemplares encuentre sin su sello particular.

MANUAL COMPLETO

DE

INSTRUCCION PRIMARIA,

ELEMENTAL Y SUPERIOR,

para uso de los aspirantes á maestros, y especialmente de los alumnos de las escuelas normales de provincia,

POR

DON JOAQUIN DE AVENDAÑO,

ex-inspector general

DE INSTRUCCION PRIMARIA DEL REINO.

Obra aprobada para servir de testo en las escuelas normales, reformada, revisada y refundida completamente por el autor.

CUARTA EDICION.

TOMO II.

MADRID:
Imprenta de Luis García, calle de San Bartolomé, núm. 4.

1859.

MATERIAS QUE COMPRENDE.

- Psicologia.
- Moral.
- Religion.
- Gramática castellana.
- Retórica.
- Poética.
- Literatura española.
- Escritura.
- Lectura.
- Educacion.
- Organizacion de las escuelas.

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA.

PRIMERA PARTE.—ELEMENTOS DE CÁLCULO.

PRIMERA SECCION.—NÚMEROS ENTEROS.

§. I. *Nociones preliminares.*

1. Llámase *cantidad* todo aquello que es susceptible de aumento ó disminucion.

2. *Unidad* es una cantidad convencional, adoptada por término de comparacion entre cantidades homogéneas (de la misma especie).

3. Un *número entero* es la reunion de varias cantidades homogéneas. Así, *veinte varas*, *cuarenta varas*, son números enteros: la *vara* es la unidad que sirve de término de comparacion entre estos dos números.

4. *Números abstractos* son los que no designan la especie de unidades que representan, como *dos*, *tres*, *cuatro*, etc.

5. *Números concretos* son los que designan la especie de unidades que representan, como *dos hombres*, *tres caballos*, *cuatro árboles*.

6. El *cálculo* es la reunion de los procedimientos empleados para aumentar, disminuir ó combinar los números entre sí.

7. La *Aritmética* es la ciencia de los números y del cálculo.

8. La *Aritmética* es una ciencia, una teoría; el cálculo una práctica: este se limita á practicar las operaciones; aquella da la razon de ellas, las demuestra y las prueba.

§. II. *De la numeracion.*

1. La *numeracion* tiene por objeto formar los números, enunciarlos y representarlos con una porcion limitada de palabras y de *caractéres* ó *cifras*. De aquí dos especies de numeracion: la *oral* y la *escrita*.

NUMERACION ORAL.

2. Para formar los números se parte de la *unidad* ó de *uno*, se añade la unidad á uno, y se obtiene el número llamado *dos;* se añade la unidad á dos, y se obtiene el número llamado *tres;* y se continúa así, añadiendo siempre la unidad al número obtenido.

3. Los nueve números primeros son: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*.

4. El número que sigue al nueve se llama *diez*. De este número se hace una nueva especie de unidad llamada *decena*.

5. Se cuentan por decenas como por unidades simples, desde una hasta nueve.

6. Una decena se llama *diez*, dos decenas *veinte*, tres decenas *treinta*, cuatro decenas *cuarenta*, cinco decenas *cincuenta*, seis decenas *sesenta*, siete decenas *setenta*, ocho decenas *ochenta*, nueve decenas *noventa*.

7. Los números comprendidos entre las decenas se nombran añadiendo á *diez*, *veinte*, *treinta*, etc., los nombres de los nueve números primeros; v. gr. *veinte y uno*, *veinte y cinco*, *ochenta y uno*, *ochenta y cinco*, etc. Se exceptúan los cinco números que siguen inmediatamente á la primera decena, reemplazando:

Diez y uno por *once*.	Diez y dos por *doce*.	Diez y tres por *trece*.	Diez y cuatro por *catorce*.	Diez y cinco por *quince*.

8. Por medio pues de las decenas y de las unidades se puede contar hasta *noventa y nueve*.

9. El número que sigue á noventa y nueve se llama *ciento*. Se hace del número *ciento* una especie de unidad, llamada *centena*, que vale *diez decenas*, así como la *decena* vale *diez unidades*.

10. Se cuenta por centenas como por decenas y unidades, desde una hasta nueve. Así se dice:

Una centena ó *ciento; dos centenas* ó *doscientos; tres centenas* ó *trescientos; cuatro centenas* ó *cuatrocientos; cinco centenas* ó *quinientos; seis centenas* ó *seiscientos; siete centenas* ó *setecientos; ocho centenas* ú *ochocientos; nueve centenas* ó *novecientos*.

11. Los números comprendidos entre las centenas se enuncian añadiendo á *ciento*, *doscientos*, *novecientos*, etc., el nombre de los *noventa y nueve* primeros números. Así se dirá:

Ciento uno..... ciento once..... doscientos doce..... trescientos trece..... novecientos noventa y seis, etc.

12. Por medio de las *centenas*, de las *decenas* y de las *unidades*, se cuenta hasta *novecientos noventa y nueve*.

13. El número que sigue á novecientos noventa y nueve, se llama *mil*. Se hace de este número una nueva especie de unidades que se llaman *millares*, y valen *diez centenas*, así como estas valen *diez decenas*, y la decena *diez unidades* simples.

14. Se cuenta por *unidades*, *decenas* y *centenas de millar*, como se ha contado por *unidades*, *decenas* y *centenas de unidades simples*. Así se dice:

Un mil, *dos mil..... diez mil*, *treinta mil..... noventa mil..... cien mil*, *novecientos noventa y nueve mil*, etc.

15. Por medio de los *millares* ó *miles* de las *centenas*, de las *decenas* y de las *unidades*, se cuenta hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve*.

16. El número que sigue á novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve, se llama *millon*. Se hace de este una nueva especie de unidad, que vale diez centenas de millar, así como el millar vale diez centenas, la centena diez decenas, y la decena diez unidades simples.

17. Se cuenta por unidades, decenas y centenas de

millon, y unidades, decenas y centenas de millar de millon, como se ha contado por unidades, decenas, centenas de millar. Asi se dice:

Un millon..... diez millones.....: novecientos noventa y nueve millones..... novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones.

18. Un billon es un millon de millones.

19. Un trillon es un millon de billones; un cuadrillon es un millon de trillones; y así de los demás.

20. Suele contarse generalmente hasta las centenas de millar de millon, porque estos números son bastante elevados para las necesidades humanas.

21. En este límite hay doce órdenes y cuatro clases de unidades.

La unidad primitiva recibió el nombre de *unidad simple* ó de *primer órden;* las decenas simples son del segundo *órden;* las centenas simples son del tercer *órden*, y esta es la primera *clase*.

Las unidades de millar pertenecen al cuarto *órden;* las decenas de millar al quinto *órden;* las centenas de millar al sexto *órden*, y estos constituyen la segunda *clase;* y así de las demás hasta la cuarta. Hé aqui su cuadro:

Unidades.		1.er *órden.*	
Decenas..	*Simples. . . . .*	2.º »	1.ª *clase.* 1.ª *separacion.* (1).
Centenas.		3.º »	
Unidades.		4.º *órden.*	
Decenas..	*De millar. . .*	5.º »	2.ª *clase.* 2.ª *separacion.* 1
Centenas.		6.º »	
Unidades.		7.º *órden.*	
Decenas..	*De millon. . .*	8.º »	3.ª *clase* 3.ª *separacion.*
Centenas.		9.º »	
Unidades.		10. *órden.*	
Decenas..	*De millar de millon. . .*	11. »	4.ª *clase* 4.ª *separacion.* 2
Centenas.		12. »	

22. El principio fundamental de esta enumeracion es *que diez unidades de un órden cualquiera forman una unidad del órden superior* inmediato.

La base de este sistema es *diez*, y su nombre *sistema decimal*.

(1) Estos signos pertenecen á la numeracion escrita.

Numeracion escrita.

23. Se representan las unidades del primer órden por los *caractéres* ó *cifras* siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve.

24. Para representar por medio de los mismos caractéres las unidades de los demás órdenes, se ha convenido en general que la *primera cifra de la derecha represente las unidades simples, y en todo número, que toda cifra colocada á la izquierda de otra represente unidades diez veces mayores que ella.*

Segun esta convencion, el número *nueve mil quinientos sesenta* y *siete*, se escribe 9,567.

25. De aquí resulta que las *cifras* ó *guarismos* tienen dos valores: el uno *absoluto*, dependiente de su forma, y por consiguiente fijo; el otro *relativo*, dependiente de su lugar, y por consecuencia variable.

Así, en el número 9,567 el valor absoluto de la cifra 9 es nueve, y su valor relativo *nueve mil.*

26. Cuando el número que ha de escribirse no contiene unidades de todos los órdenes, se recurre á la cifra auxiliar 0, llamada cero, que no teniendo valor alguno por sí mismo, sirve únicamente para conservar á las cifras significativas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 el lugar correspondiente al órden de sus unidades. Así:

El número *nueve millones, nueve unidades*, que no tiene ni *centenas*, ni *decenas*, ni *unidades de millar*, ni *centenas*, ni *decenas simples*, se escribirá 9.000,009.

27. Segun la convencion fundamental de la numeracion escrita, resulta que, *añadiendo* á la derecha de un número *uno, dos, tres..... ceros*, se le hace *diez, cien, mil veces* mayor..... y que recíprocamente se le hace *diez, cien, mil veces.....* menor si se *suprime* á la derecha del número *uno, dos, tres.....* ceros. Así:

Añadiendo tres ceros á la derecha de 248, se hace este número mil veces mayor, porque en su resultado

248,000, cada una de sus cifras 2, 4, 8, expresan unidades mil veces mayores que antes.

28. Para leer un número escrito en cifras: 1.° Se le divide en porciones de tres cifras, partiendo de la derecha (1), que se señalan con el signo correspondiente. 2.° Se enuncia, comenzando por la izquierda, cada porcion como si fuese sola, teniendo cuidado de darle el nombre de la clase á que corresponda. Así el número:

9009,907503,642 se lee: nueve billones, nueve mil
2 1
novecientos siete millones, quinientos tres mil seiscientos cuarenta y dos.

29. Para escribir un número dictado en lenguaje ordinario ó comun, se colocan sucesivamente al lado las unas de las otras, comenzando por la izquierda, las cifras que expresen cuantas centenas, decenas y unidades de cada clase contiene el número, reemplazando por ceros las unidades, decenas ó centenas que falten en cada clase. Sea el número que se ha de escribir:

Diez y nueve mil trescientos cuatro millones nueve.

La clase de unidades superiores es la de los *millares de millon*, que solo contiene aquí dos órdenes de unidades representadas por 19; la de los *millones*, careciendo, como carece, de decenas, se escribirá 304; la de los *miles*, careciendo de centenas, decenas y unidades, se escribirá 000; finalmente, la de las *unidades simples*, careciendo de centenas y decenas, se escribirá 009; y todas ellas reunidas por su órden, dan por resultado 19,304000,009.
1

30. La Aritmética contiene cuatro operaciones fundamentales, que se llaman: *adicion* ó *suma*, *sustraccion* ó *resta*, *multiplicacion*, y *division*.

§. III. *Adicion* ó *suma*.

1. La *adicion* ó *suma* es una operacion que tiene por

(1) La última porcion podrá no contener las tres, sino dos, y hasta una.

objeto reunir varios números, llamados *sumandos*, en uno solo, que se denomina *suma* ó *total*.

2. Para poder sumar los números compuestos de una sola cifra, es preciso saber de memoria las *sumas* que dan las nueve cifras unidas dos á dos, lo que se aprende en la *tabla* llamada *de sumar*.

3. Para formar la *tabla de sumar* se escriben en una línea horizontal las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y se obtienen las demás líneas añadiendo una unidad á los números de la línea inmediata superior; pero es mas sencillo indicar las sumas de las nueve cifras significativas unidas dos á dos como sigue:

Números para sumar.	*Sumas.*	*Números para sumar.*	*Sumas.*	*Números para sumar.*	*Sumas.*
—	—	—	—	—	—
1 y 1. . . .	son 2.	3 y 3. . . .	son 6.	5 y 8 ú 8 y 5. . .	13.
1 y 2 ó 2 y 1. . .	3.	3 y 4 ó 4 y 3. . .	7.	5 y 9 ó 9 y 5. . .	14.
1 y 3 ó 3 y 1. . .	4.	3 y 5 ó 5 y 3. . .	8.		
1 y 4 ó 4 y 1. . .	5.	3 y 6 ó 6 y 3. . .	9.	6 y 6. . . .	son 12.
1 y 5 ó 5 y 1. . .	6.	3 y 7 ó 7 y 3. . .	10.	6 y 7 ó 7 y 6. . .	13.
1 y 6 ó 6 y 1. . .	7.	3 y 8 ú 8 y 3. . .	11.	6 y 8 ú 8 y 6. . .	14.
1 y 7 ó 7 y 1. . .	8.	3 y 9 ó 9 y 3. . .	12.	6 y 9 ó 9 y 6. . .	15.
1 y 8 ú 8 y 1. . .	9.				
1 y 9 ó 9 y 1. . .	10.	4 y 4. . . .	son 8.	7 y 7. . . .	son 14.
		4 y 5 ó 5 y 4. . .	9.	7 y 8 ú 8 y 7. . .	15.
2 y 2. . . .	son 4.	4 y 6 ó 6 y 4. . .	10.	7 y 9 ó 9 y 7. . .	16.
2 y 3 ó 3 y 2. . .	5.	4 y 7 ó 7 y 4. . .	11.		
2 y 4 ó 4 y 2. . .	6.	4 y 8 ú 8 y 4. . .	12.		
2 y 5 ó 5 y 2. . .	7.	4 y 9 ó 9 y 4. . .	13.	8 y 8. . . .	son 16.
2 y 6 ó 6 y 2. . .	8.			8 y 9 ó 9 y 8. . .	17.
2 y 7 ó 7 y 2. . .	9.	5 y 5. . . .	son 10.		
2 y 8 ú 8 y 2. . .	10.	5 y 6 ó 6 y 5. . .	11.		
2 y 9 ó 9 y 2. . .	11.	5 y 7 ó 7 y 5. . .	12.	9 y 9. . . .	son 18.

4. El signo de la adicion es + que se lee *mas*; el de igualdad es = que significa *igual*. Así en lugar de:

8 y 9 ó 9 y 8 son 17,

se puede escribir de una manera abreviada:

$$8+9=17 \text{ ó } 9+8=17.$$

5. Para sumar los números compuestos de varias cifras:

1.° Se escriben las unas debajo de las otras, de manera que las unidades de un mismo órden se encuentren en la misma columna vertical.

2.° Se coloca en seguida una raya debajo de estos números, para separarlos del resultado, que debe ponerse debajo.

3.° Se suman las cifras de la primera columna de la derecha, y si la suma no pasa de 9, se escribe debajo de la raya y en la misma columna.

Si la suma pasa de 9, solo se escriben sus unidades, y se reservan las decenas para unirlas á la columna de las decenas.

4.° Se opera de una manera análoga con las columnas siguientes hasta la última, bajo de la cual se pone la suma tal cual se haya obtenido.

6. Sean para sumar los cuatro números siguientes: 8,479, 58, 793 y 1,540. Se dispone el cálculo cual sigue, y se dice:

$$\begin{array}{r} 8479 \\ 58 \\ 793 \\ 1540 \\ \hline 10870 \end{array}$$

1.ª col. 9 y 8 son 17 y 3 son 20: coloco 0 en la columna de las unidades y llevo dos decenas.

2.ª col. 2 que llevo y 7 son 9 y 5 son 14 y 9 son 23 y 4 son 27: coloco un 7 en la columna de las decenas y llevo dos centenas.

3.ª col. 2 que llevo y 4 son 6 y 7 son 13 y 5 son 18: coloco 8 en la columna de las centenas y llevo una unidad de millar.

4.ª col. 1 que llevo y 8 son 9 y 1 son 10; y coloco esta suma cual la he hallado. Lo que da 10,870 por suma pedida.

7. Se comienza la *adicion* por la derecha, porque de este modo la suma de cada columna produce una cifra de la suma pedida.

No sucedería siempre así si se comenzase á sumar por la izquierda. En efecto, si la suma de una columna daba mas que nueve unidades, seria forzoso escribir las unidades y unir las decenas excedentes á la cifra ya colocada bajo la columna precedente, lo que no podria verificarse sin cambiar dicha cifra.

8. Llámase *prueba* de una operacion á otra operacion hecha para probar la exactitud de la primera.

9. La mas sencilla prueba de la *adicion* se hace con

la adicion misma, comenzando el cálculo de abajo á arriba. Como las cifras de cada columna no están ya unidas á un mismo número, no se ve uno expuesto á cometer de nuevo los errores que hayan podido formarse al sumar de arriba abajo, y por consiguiente, si se hallan todas las cifras del total obtenido, es muy probable que este total sea exacto.

La prueba de la adicion por la sustraccion es, no solamente probable, sino cierta. (Véase §. IV, núm. 10.)

§. IV. *Sustraccion.*

1. La *sustraccion* es una operacion que tiene por objeto quitar un número de otro, ó lo que es lo mismo, hallar la diferencia que hay entre ambos. El resultado de la operacion se llama *resta, exceso* ó *diferencia.*

2. Si el número que se ha de restar de otro tiene una sola cifra, y el mayor de ambos no excede de 18, se hallará fácilmente su diferencia por medio de la tabla de la adicion.

1.° Sea el número 4 que se ha de restar de 9: se busca en las *columnas de los números para sumar* cuál es el número que añadido á 4 da 9, y se halla que 5: este pues será la diferencia de 4 á 9.

2.° Sea 7 que se ha de restar de 16: se busca del mismo modo el número que añadido á 7 da 16: este es el 9, y 9 será pues la diferencia de 7 á 16.

3. El signo de la sustraccion es — que significa *menos.* Así:

$$9-4=5 \quad 16-7=9.$$

4. La adicion de un mismo número á otros dos no altera su diferencia.

Sea 4 que se ha de restar de 9: si yo añado 9 á cada uno de estos números, tendré 13 y 18, cuya diferencia es 5, lo mismo que la de 4 á 9.

5. La diferencia de dos números puede obtenerse de dos modos: ya quitando del mayor número todas las unidades del menor, ya buscando cuanto debe añadirse á este para obtener el mayor.

6. Para hacer una sustraccion cualquiera:

1.° Se coloca el número menor, que se llama *sustraendo*, debajo del mayor, que se denomina *minuendo*, de manera que se correspondan las unidades de un mismo órden, y se subraya el número inferior para separarle del resultado.

2.° Se quita sucesivamente, comenzando por la derecha, cada cifra del número inferior de su correspondiente en el superior, y se escribe la resta debajo, ó cero si no hubiere resta.

3.° Si la cifra inferior es mayor que la superior, se añade á esta diez unidades para hacer posible la sustraccion, y cuando se pasa á la columna siguiente, se aumenta su cifra inferior con una sola unidad, que vale las diez añadidas á la superior anterior.

4.° Se opera de este mismo modo en cada una de las columnas siguientes hasta la última, debajo de la cual se pone la diferencia tal cual se haya obtenido.

7. Sea 467 que se ha de sustraer de 8005. Se dispone el cálculo como sigue, y se dice:

8005
467
7538

1.ª col. De 5 quitar 7 es imposible: añado 10 á 5, y digo: 7 de 15 resta 8: coloco 8 en la columna de las unidades y llevo una decena para añadir á la cifra inferior de la segunda columna, á fin de que la diferencia permanezca la misma.

2.ª col. 1 que llevo y 6 son 7: de 0 quitar 7 es imposible: añado 10 á 0, y digo: 7 de 10, 3: coloco 3 en la columna de las decenas y llevo una centena, porque he añadido 10 decenas á la cifra superior de estas, para hacer la sustraccion posible.

3.ª col. 1 que llevo y 4 son 5: 5 de 0 no es posible: añado pues 10 á 0; 5 de 10 quedan 5: coloco 5 en la columna de las centenas y llevo una unidad de millar.

4.ª col. Quien de 8 saca 1, resta 7. Lo que da por resultado 7538, diferencia buscada.

8. Se empieza la sustraccion por la derecha, porque de este modo cada sustraccion parcial da por resultado una cifra de la diferencia buscada.

No sucederia siempre así comenzando la sustraccion

por la izquierda. En efecto, si las cifras inferiores eran mayores que las superiores correspondientes, no podria hacerse la sustraccion posible por la adicion de 10, á menos de cambiar las cifras de la resta ya obtenida.

9. La prueba de la sustraccion se hace por la adicion y por la sustraccion misma.

Prueba por la adicion. Se suma la diferencia con el número menor ó sustraendo, y si ambas operaciones están bien hechas, es claro que debe hallarse el número mayor ó minuendo, puesto que la diferencia es justamente lo que falta al menor para ser igual al mayor. La adicion se hace de abajo arriba para no tener nada que escribir, y á medida que se encuentra el total de cada columna, se reproduce la cifra correspondiente del número mayor: v. gr. en la operacion practicada.

8005	*Minuendo.*
467	*Sustraendo.*
7538	*Diferencia.*

1.ª col. 8 y 7 son 15: la cifra 5 es la misma que la correspondiente del número mayor: llevo 1.

2.ª col. 1 y 3 son 4, y 6 son 10, como en el número mayor, y llevo 1.

3.ª col. 1 y 5 son 6, y 4 son 10, como en el número mayor, y llevo 1.

4.ª col. 1 y 7 son 8, como en el número mayor. De consiguiente la operacion está bien hecha.

Prueba por la sustraccion. Se sustrae ó resta la diferencia del número mayor, y se debe hallar entonces el menor, puesto que la diferencia es el exceso del número superior sobre el inferior.

10. La prueba de la adicion por la sustraccion puede hacerse de dos modos.

1.° Se suman todos los sumandos, menos uno, se coloca el total parcial debajo del general, y se resta el primero del segundo. Si la operacion está bien hecha, debe hallarse el número que no se ha comprendido en la segunda suma.

2.° Se suma cada columna comenzando por la izquierda, y se resta la suma de la que le corresponde en el total; se añade á este como formando decenas á su respecto la resta producida por la columna precedente: si la operacion está bien hecha, resultará 0 en la última columna, puesto que se habrán restado sucesivamente de la suma total las sumas parciales de que está compuesta.

11. Los diferentes números de la *adicion* y de la *sustraccion* deben designar siempre cosas de una misma especie; porque seria imposible, por ejemplo, añadir un número de árboles á un número de caballos, ó quitar un número de caballos de un número de árboles, puesto que ni hay caballos en los árboles, ni árboles en los caballos.

12. Segun lo cual, la unidad del total es siempre de la misma especie que la de los números que le forman, y la de la diferencia de la misma especie que la de los que resulta.

§. V. *Multiplicacion.*

1. La multiplicacion es una operacion que tiene por objeto repetir un número tantas veces como unidades tiene otro.

2. El número que se ha de multiplicar se llama *multiplicando;* aquel por el cual se multiplica *multiplicador,* y el resultado de la operacion *producto.*

El multiplicando y multiplicador juntos se llaman *factores* del producto, porque son ellos los que le *forman.*

3. El signo de la multiplicacion es $\times$ que significa *multiplicado por*. Así, para expresar que 9 multiplicado por 7 es igual á 63, se escribe:

$$9\times7=63.$$

Se suelen emplear tambien el punto ó el paréntesis.

$$9.7=63;\ (9)\ (7)=63.$$

4. La multiplicacion no es mas que una especie de adicion abreviada, porque para obtener el producto puede escribirse el multiplicando tantas veces como unidades hay en el multiplicador, y hacer luego la adicion: la suma será el producto pedido. Así el producto de 9 por 7 es:

$$9+9+9+9+9+9+9=63.$$

Pero si el multiplicador tuviese muchas cifras, el cálculo seria entonces demasiado largo, por lo cual es preciso abreviar la operacion.

5. Para hacer una multiplicacion de una manera mas abreviada que por la adicion, es preciso saber de memoria los productos de los nueve primeros números multiplicados dos á dos: estos productos están reunidos en la tabla siguiente, atribuida á Pitágoras:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera línea horizontal encierra los nueve primeros números: la segunda contiene los productos de estos números por 2, y se forma añadiendo cada uno de estos números á sí mismo: la tercera contiene los productos de los nueve números por 3, y se forma añadiendo los números de la segunda línea á los de la primera, y así de las demás, esto es, añadiendo siempre los números de la línea anterior á la que se forme á los de la primera.

Segun la disposicion de esta tabla, el producto de dos números simples se halla en la interseccion de la línea horizontal con la vertical, que comienzan por aquellos factores. Así 63, producto de 9 por 7, está en la interseccion de la línea horizontal, que comienza por 7, con la vertical que comienza por 9.

La experiencia prueba que esta tabla, excelente para la vista, es poco favorable á la memoria. Vale pues mas emplear una tabla de multiplicacion dispuesta como la de la adicion.

1	*vez*	1	*es*	1
1		2		2
1		3		3
1		4		4
1		5		5
1		6		6
1		7		7
1		8		8
1		9		9

2	*veces*	2	*son*	4
2		3		6
2		4		8
2		5		10
2		6		12
2		7		14
2		8		16
2		9		18

3	*veces*	3	*son*	9
3		4		12
3		5		15
3		6		18
3		7		21
3		8		24
3		9		27

4	*veces*	4	*son*	16
4		5		20
4		6		24
4		7		28
4		8		32
4		9		36

5	*veces*	5	*son*	25
5		6		30
5		7		35
5		8		40
5		9		45

6	*veces*	6	*son*	36
6		7		42
6		8		48
6		9		54

7	*veces*	7	*son*	49
7		8		56
7		9		63

8	*veces*	8	*son*	64
8		9		72

9	*veces*	9	*son*	81

6. El producto de dos factores no se altera aunque se cambie el órden de su colocacion.

Así, el producto de 6 por 3 es igual al de 3 por 6. En efecto, si se descompone el número 6 en sus unidades 1, 1, 1, 1, 1, 1, y si se escriben las unas debajo de las otras en otras tantas líneas horizontales como unidades tiene el número 3, se tendrá:

1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1

Cada línea horizontal contiene seis unidades, y cada una de las verticales tres. De cualquier manera que estas unidades se sumen, se obtendrá siempre el número 18. Ahora bien: proceder por las líneas horizontales, es mul-

tiplicar 6 por 3: proceder por las verticales, es multiplicar 3 por 6.

Hé aquí la razon por qué la segunda tabla de multiplicacion solo encierra 45 productos en vez de 81.

7. Las unidades del producto deben ser de la misma especie que las del multiplicando, porque el producto es la suma que se encontraria si se hiciese la adicion de este multiplicando repetido tantas veces como indica el multiplicador. Así:

El producto de 7 pesetas por 5 es 35 pesetas; porque la adicion de 7 pesetas repetidas 5 veces, daria 35 pesetas por total.

8. La especie de las unidades del multiplicador no influye en las del producto, porque el multiplicador no indica nunca mas que el número de veces que debe repetirse el multiplicando.

9. Si se multiplican decenas por una cifra, deben obtenerse decenas, puesto que el producto es siempre de la misma especie que el multiplicando. Del mismo modo debe obtenerse un producto de centenas si se multiplican centenas, de miles si se multiplican miles, y así de los demás.

10. Para multiplicar un número de varias cifras por una sola:

1.° Se escribe el multiplicador debajo de las unidades del multiplicando, y se tira una raya, bajo la cual se coloca el producto.

2.° Se multiplican sucesivamente, empezando por la derecha, cada órden de unidades del multiplicando por el multiplicador. Si el primer producto parcial no pasa de 9, se escribe debajo de la cifra que le ha producido: si pasa de 9, se escriben únicamente las unidades que encierra, y se llevan las decenas para unir al producto de las decenas.

3.° Se procede del mismo modo con el segundo producto parcial, despues con el de las centenas, etc., observando siempre el colocar las unidades de cada uno bajo la cifra del multiplicando que le ha producido.

4.° Si un producto parcial es un número exacto de decenas, de cualquier órden que estas sean, se pone un cero en el producto, y se lleva la especie de unidad que indique la operacion.

5.° Y finalmente, se escribe tal cual se halla el producto de la última cifra del multiplicando.

11. Sean 1256 que se han de multiplicar por 8.

$$\begin{array}{r} 1256 \\ 8 \\ \hline 10048 \end{array}$$

8 veces 6 unidades son 48; coloco las 8 unidades en el producto, y llevo 4 decenas para añadir al producto siguiente:

8 veces 5 decenas son 40 decenas, y 4 que llevaba son 44 decenas: coloco 4 decenas en las del producto, y llevo 4 centenas.

8 veces 2 centenas son 16 centenas, y 4 que llevo son 20 centenas: coloco 0 en el producto de las centenas, y llevo dos miles ó dos unidades de millar.

8 veces 1 mil son 8 mil, y 2 que llevo son 10 mil, que escribo en el producto: 10,048 es pues el producto de 1256 repetido 8 veces.

En la práctica no se menciona ni el órden de las unidades, ni el lugar de cada producto parcial: se dice pues, para abreviar el cálculo:

8 por 6 son 48; pongo 8 y llevo 4.
8 por 5 son 40 y 4 son 44; pongo 4 y llevo 4.
8 por 2 son 16 y 4 son 20; pongo 0 y llevo 2.
8 por 1 es 8 y 2 son 10; pongo 10.

12. Multiplicar un número por otros dos, es multiplicarle por el producto de estos dos números; y recíprocamente multiplicar un número por el producto de otros dos, es multiplicarle sucesivamente por estos dos números. Así:

$3\times4\times5=3\times20$ (producto de 4 por 5).

recíprocamente $3\times20=3\times4\times5$.

En efecto, si en la expresion de $3\times4\times5$ se descompusiese el número 3 en sus unidades, se tendria $1\times4\times5$ repetido tres veces. Ahora bien: $1\times4\times5=4\times5$ ó 20, puesto que $1\times4=4$; luego $3\times4\times5=3$ repetido 20 veces, y por consiguiente$=3\times20$.

13. Para multiplicar un número por la unidad seguida

de 1, 2, 3..... ceros, es decir, por 10, 100, 1000..... basta escribir á la derecha del multiplicando tantos ceros como haya en el multiplicador. Así:

$16\times10=160$, $16\times100=1600$, $16\times1000=16000$.

En efecto, en 160 las unidades se han convertido en decenas; las decenas en centenas, y cada parte del número 16, habiéndose hecho diez veces mayor el mismo número 16, se ha hecho tambien diez veces mayor.

En 1600 el número 16 se ha hecho 100 veces mayor.

En 16000 el número 16 se hizo 1000 veces mayor, y así de los demás.

14. Cuando uno ó ambos factores terminan por ceros, se hace la multiplicacion sin tomar en cuenta los ceros, y se escriben en seguida á la derecha del producto total tantos ceros como contenia uno de los factores ó entrambos reunidos.

Sea 16 que se ha de multiplicar por 800, y 160 por 8000.

1.er caso. $800=8\times100$: multiplico desde luego 16 por 8, y tengo 128: multiplico en seguida 128 por 100 añadiéndole dos ceros, lo que da 12800.

2.° caso. $160=16\times10$, y $8000=8\times1000$: multiplico desde luego 16 por 8, y obtengo 128; y añado luego á este producto 4 ceros, 1 por 10, 3 por 1000, lo que da 1280000.

15. Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera, se multiplica el multiplicando sucesivamente por cada una de las cifras del multiplicador, y se colocan los productos parciales de manera que la primera cifra de la derecha de cada uno de ellos esté colocada debajo de la cifra del multiplicador que ha servido para la multiplicacion parcial: se subraya el último producto, se hace la adicion de todos los productos parciales, y la suma es el producto total que se busca.

Sea 567 que se ha de multiplicar por 834. Hé aquí la operacion:

567 *Multiplicando.*
834 *Multiplicador.*

2268
1701
4536

472878 *Suma de los productos parciales.*

16. Si hay uno ó mas ceros entre dos cifras del multiplicando, debemos, sin multiplicarlos, escribir 0 en el producto, á no ser que se lleven decenas del producto parcial anterior, en cuyo caso se escribirán estas en el producto.

Si hay un cero entre dos cifras del multiplicador, se pasa á multiplicar la cifra inmediata, corriendo su producto parcial un lugar mas hácia la izquierda; v. gr.

1.er caso. 40309	2.° caso. 338
3	206
120927	2028
	676
	69628

17. Cuando el número dado por multiplicando tiene menos cifras que el multiplicador, se acostumbra, para abreviar y simplificar el cálculo, cambiar el órden de los factores y multiplicar por el multiplicando. Esto no altera en manera alguna el resultado, si se tiene cuidado de indicar que el producto total expresa unidades de la misma especie que las del multiplicando primitivo.

18. Se comienza cada multiplicacion por la derecha del multiplicando, porque la multiplicacion no es mas que una adicion abreviada.

El órden en que se multiplica por las diferentes cifras del multiplicador es indiferente; pero se acostumbra á comenzar por su derecha para evitar descuidos.

19. Para hacer la prueba de una multiplicacion se multiplican en órden inverso ambos factores. Si se encuen-

tra el mismo producto, es probable que la operacion esté bien hecha.

La division y la propiedad particular al número 9, suministran otras pruebas (Véase §. VI, n.° 20, 24 y 28).

20. Llámanse *múltiplos* de un número los diversos productos de este número por 2, 3, 4, etc. Así 14, 21, 28, 35, etc., son los múltiplos de 7, porque se les obtiene multiplicando 7 por 2, por 3, por 4, por 5, etc.

El *múltiplo* que resulta de un producto por 2, se llama *duplo;* de un producto por 3, *triplo;* por 4, *cuádruplo;* por 5, *quíntuplo;* por 6, *séxtuplo*, etc.

21. La suma de dos ó de varios múltiplos de un número es tambien un múltiplo de este uúmero. Así:

$$7.\ 2+7.\ 3+7.\ 4+7.\ 5+7.\ 6=7.\ 20.$$

22. Todo múltiplo de 2 es un *número par: número impar* es el que no es múltiplo de 2.

Se conoce que un número es *par* cuando está terminado por las cifras 0, 2, 4, 6, 8; y que es *impar*, cuando está terminado por 1, 3, 5, 7, 9.

23. Si uno de los factores es par, el producto es par; y es impar, si ambos factores lo son.

§. VI. *Division.*

1. La *division* es una operacion que tiene por objeto general buscar cuántas veces un número está contenido en otro.

2. El número que se ha de dividir se llama *dividendo*, el número por el cual se divide *divisor*, y el resultado de la operacion *cuociente*. Al dividendo y divisor unidos se les llama *términos* de la division.

3. Los signos de la division son: —, | , ó :, que significan *dividido por*. Estos signos se emplean así:

$$\frac{8}{2},\ 2\mid 8,\ 8{:}2.$$

4. La *division* es una especie de sustraccion, porque

para obtener el cuociente se puede restar el divisor del dividendo tantas veces como sea posible: el número de sustracciones será evidentemente el cuociente buscado. Divídase 48 por 8.

48—8=40,	1.ª *resta*.	24—8=16,	4.ª *resta*.
40—8=32,	2.ª	16—8= 8,	5.ª
32—8=24,	3.ª	8—8= 0,	6.ª

Habiendo practicado seis sustracciones, 6 será el cuociente hallado; pero el cálculo seria demasiado largo si el dividendo fuese de alguna magnitud; por lo cual es indispensable abreviar la operacion.

5. Expresando el cuociente cuántas veces el dividendo contiene al divisor, es claro que repitiendo el divisor tantas veces como el cuociente indica, debe reproducirse el dividendo. Así:

8 repetido 6 veces ú $8 \times 6 = 48$.

6. Para hallar el cuociente de un número de una ó dos cifras, dividido por un número de una sola cifra, basta con saber bien la tabla de multiplicacion, porque se ve de seguida la cifra por la cual seria necesario multiplicar el divisor para producir el dividendo: esta cifra multiplicador es precisamente el cuociente buscado.

Pueden presentarse dos casos: ó el número que se ha de dividir se halla en la tabla, ó no se halla. En el primer caso el cuociente es *completo;* en el segundo, solo *aproximado*: v. gr.

En 48 ¿cuántas veces cabe 8?—El cuociente es 6, porque 6 por 8 son 48.

En 52 ¿cuántas veces cabe 8?—El verdadero cuociente cae entre 6 y 7, porque 8×6 ó 48 es menor que 52, y 8×7 ó 56 es mayor que 52. El número 6, mas pequeño de los dos multiplicadores, se toma en este caso por cuociente; pero este cuociente es solo aproximado, pues queda un residuo de 4 unidades.

7. El cuociente de una division puede considerarse de dos modos:

1.° Como el número de veces que el dividendo contiene al divisor; 2.° como una parte del dividendo que se encuentra contenida en él tantas veces como lo indica el divisor.

1.° Sean 32 pesetas que se han de distribuir de manera que cada persona tenga 4 pesetas; ¿á cuántas personas se les han de dar?—A 8. Aquí 8 expresa el número de veces.

2.° ¿Cuánto recibirán 8 personas entre las cuales se quieren repartir 32 pesetas?—4 pesetas Aquí 4 pesetas expresa una parte del dividendo.

8. En general el cuociente expresa el número de veces que el dividendo contiene al divisor cuando los dos términos de la division indican unidades de la misma especie; y expresa una parte del dividendo cuando los dos términos de la division no indican unidades de la misma especie.

9. Cuando una cosa está dividida en partes iguales, se expresan estos números como los nombres llamados *partitivos*. Así se dice: la *octava*, la *sétima*, la *sexta*, la *quinta*..... etc. parte de una cosa dividida en 8, 7, 6 ó 5 partes iguales.

10. Sea un número de varias cifras que se ha de dividir por una sola, tal como 4536 por 8. Se dispone la operacion así:

DIVIDENDO	4536	8	DIVISOR.	
	4000	5	*centenas*.. .	*Cuocientes parciales.*
1.ª *resta*..	536	6	*decenas*. . .	
	480			
2.ª *resta*..	56	7	*unidades*. . .	
	56			
3.ª *resta*..	0	567	*cuociente total*.	

Buscaremos desde luego solo las unidades de órden superior del cuociente.

Cuatro mil, dividido en 8 partes iguales, no puede dar un mil al cuociente; así el cuociente encierra centenas á lo mas.

Cuatro mil y 5 centenas ó 45 centenas, divididas en 8 partes iguales, dan por cada parte 5 centenas con una resta. Ahora bien: 8 veces 5 centenas hacen 40 centenas ó 4000; restando este número de 4536, quedan 536 que dividir en 8 partes iguales.

536 contienen 53 decenas, que divididas en 8 partes iguales, dan por cada parte 6 decenas con una resta. Ahora bien: 8 veces 6 decenas son 48 decenas ó 480 unidades;

restando este número de 536, quedan 56 unidades que dividir en 8 partes iguales.

56 unidades, divididas en 8 partes iguales, dan por cada parte 7 unidades sin resta. En efecto, 8 veces 7 unidades son 56 unidades, que restadas de 56, dan 0 por resta.

Por consiguiente, el cuociente se compone de 5 centenas, 6 decenas y 7 unidades, ó de 567 unidades.

11. En la práctica se abrevia el cálculo de la manera siguiente:

4536	8
	567

Se toman á la izquierda del dividendo tantas cifras cuantas sean necesarias para contener una vez por lo menos al divisor, y se escribe la primera cifra del cuociente debajo de las unidades del primer dividendo parcial: la resta, si la hay, se une como decenas á la cifra siguiente del dividendo total para formar el segundo dividendo parcial; pero no se escribe. Se coloca la segunda cifra del cuociente á la derecha de la primera, y de hecho se continúa del mismo modo hasta las unidades del dividendo total.

12. Si el dividendo parcial no contiene ni una sola vez al divisor, v. gr.

4025	5
	805

Se escribe 0 en el cuociente, luego se une el dividendo parcial, como decenas, á la cifra siguiente del dividendo total.

13. Para dividir dos números cualesquiera el uno por el otro:

1.º Se escribe el divisor á la derecha del dividendo, y se separan estos dos términos por una raya vertical: se pone debajo del divisor una raya horizontal, debajo de la cual se escriben las cifras del cuociente á medida que se van obteniendo.

2.º Se toman por la izquierda del dividendo las cifras necesarias para formar un número que contenga al divisor, y se busca cuántas veces el dividendo parcial contiene el divisor: se escribe este número debajo del divisor, obteniendo así la cifra de las unidades de órden superior del cuociente.

3.º Se multiplica el divisor por la cifra obtenida, se resta el producto del dividendo parcial, y se baja á la derecha de la resta la cifra siguiente del dividendo para formar con la resta un nuevo dividendo parcial.

4.º Se ejecuta con el segundo dividendo parcial lo que con el precedente, determinando así la segunda cifra del cuociente, que se escribe á la derecha de la primera, y se repiten las mismas operaciones hasta haber agotado enteramente las cifras del dividendo.

5.º Si un dividendo parcial es menor que el divisor, se pone un cero en el cuociente.

14. Se tantea cada cifra del cuociente antes de escribirla, multiplicando de memoria por esta misma cifra las dos primeras de la izquierda del divisor, y viendo entonces si el producto puede restarse de las dos ó de las tres primeras de la izquierda del dividendo parcial.

Se conoce que una cifra del cuociente es mayor que la correspondiente, cuando no puede tener lugar esta sustraccion. Se disminuye entonces unidad por unidad, hasta tanto que la sustraccion sea posible.

Se conoce que una cifra del cuociente es menor que la correspondiente, cuando la resta es igual ó mayor que el divisor. Se aumenta entonces esta cifra unidad por unidad, hasta tanto que la resta sea menor que el divisor.

15. Puede saberse siempre de antemano cuántas cifras tendrá el cuociente. Basta para esto con demarcar el primer dividendo parcial, contar todas las demás cifras del dividendo total, y añadir una á su número.

16. Sea 472,878 que se ha de dividir por 567.

472878	567
4536	834
1927	
1701	
2263	
2268	
0000	

El divisor 567, no estando contenido en las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo ó 472, tomo 4728 por primer dividendo parcial, cuento las demás cifras del dividendo total, añado una á su número, y veo así que el cuociente no tendrá mas que tres cifras; ó en otros términos, que las unidades de órden superior del cuociente serán centenas.

Hecho esto, busco cuántas veces 567 está contenido en 4728. Para conseguirlo con mayor rapidez, busco desde luego cuántas veces la primera cifra 5 del divisor está contenida en las dos primeras cifras 47 del dividendo, y hallo que está contenida 9 veces.

Tanteo la cifra 9, multiplicando de memoria por 9 el número 56: 9 veces 6 son 54, y llevo 5: 9 por 5 son 45, y 5 son 50, que no pueden restarse de 47: por consiguiente, 9 es un número mayor que el correspondiente. Tanteo 8 del mismo modo: 8 por 6 son 48, y llevo 4; 8 por 5 son 40, y 4 son 44, que puede restarse de 47: por consiguiente, escribo 8 en el cuociente.

Multiplico por 8 todo el divisor, y tengo 4536, que resto de 4728, obteniendo por resíduo 192 centenas.

Al lado de este resíduo 192 bajo la cifra 7 de las decenas del dividendo, y tengo 1927 decenas por segundo dividendo parcial, y digo: en 1927 ¿cuántas veces cabe 567, ó en 19 cuántas veces cabe 5? Por lo menos 2 veces.

$$\begin{array}{r} 567 \\ 2 \\ \hline 1134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1927 \\ 1134 \\ \hline 793 \end{array}$$

Tanteo la cifra 2, multiplicando por 2 el divisor 567: tengo 1134, que resto de 1927, y quedan 793, número mayor que el divisor: por consiguiente, 2 es menor que el número correspondiente.

Multiplico por 3 todo el divisor, y tengo 1701, que resto de 1927, y me queda un resíduo de 226 decenas.

Al lado de este 226 bajo la cifra 8 de las unidades del dividendo: tengo 2268 por tercer dividendo parcial, y digo: ¿en 2268 cuántas veces cabe 567, ó en 22 cuántas cabe 5? Veo que 4, y escribo 4 en el cuociente.

Multiplico por 4 todo el divisor, y tengo 2268, que restado de 2268, da por resultado 0.—El cuociente exacto es pues 834.

En la práctica, en vez de escribir debajo cada dividendo parcial para restar en seguida el producto del divisor por cada cifra del cuociente, se efectúa simultáneamente la multiplicacion y la sustraccion. Sea el mismo ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 472878 & 567 \\ \cline{2-2} 1927 & 834 \\ 2268 & \\ 0 & \end{array}$$

En 4728 ¿cuántas veces cabe 567, ó en 47 cuántas cabe 5?—8 veces. 8 veces 7 son 56, á 58 van 2: 8 veces 6 son 48, y 5 que se llevan son 53; de 62 quedan 9: 8 veces 5 son 40, y 6 que llevo son 46; de 47 queda una; y bajo al lado de la resta 192 la cifra siguiente del dividendo.

En 19 ¿cuántas veces cabe 5?—3 veces. 3 veces 7 son 21, de 27 restan 6: 3 por 6 son 18, y 2 que llevaba son 20, de 22 quedan 2: 3 veces 5 son 15, y 2 que se llevan 17, de 19 restan 2; y bajo al lado de la resta 226 la cifra siguiente del dividendo.

En 22 ¿cuántas veces cabe 5?—4 veces. 4 veces 7 son 28, de 28, 0: 4 veces 6 son 24, y 2 que se llevan 26, de 26 resta 0: 4 veces 5 son 20, y 2 que se llevan son 22, de 22 queda 0. 834 es pues el cuociente exacto.

17. El cuociente es *exacto* cuando no queda resíduo de la division.

El cuociente es *aproximado* cuando queda algun resíduo de la division. Para hacer este cuociente exacto, se coloca á la derecha de sus unidades la resta de la division, debajo de la cual se escribe el divisor, separando ambos con una raya.

Sean 453 que se han de dividir por 14.

$$\begin{array}{r|l} 453 & 14 \\ \cline{2-2} & 32\frac{5}{14} \\ 33 & \\ 5 & \end{array}$$

El cuociente está comprendido entre 32 y 33, puesto que hay una resta de 5. Es pues preciso dividir aun esta resta 5 por 14; es decir, tomar la décima cuarta parte de las 5 unidades que restan. Pero la décimacuarta parte de 5 unidades es igual á cinco veces un catorce avos de unidad, ó á cinco catorce avos que se escribe $\frac{5}{14}$ y que se añade al cuociente.

18. Cuando el divisor contiene únicamente la unidad seguida de uno ó de varios ceros, la division consiste en dividir las cifras del dividendo en dos grupos: el de la derecha contiene tantas cifras como ceros hay en el divisor,

y constituye la resta de la division; el de la izquierda comprende todas las demás cifras del dividendo, y da el cuociente.

1.° Sean 334 que se ha de dividir por 10.

Dividido 334 en dos grupos, el de la izquierda 33 es el cuociente; el de la derecha 4 es la resta, que solo tiene una cifra, porque en el divisor no hay mas que un cero.

2.° Sea 2334 que se ha de dividir por 100.

Dividido en dos grupos, 23, 34, el de la izquierda 23 es el cuociente; el de la derecha 34 es la resta, que tiene dos cifras porque el divisor 100 tiene dos ceros.

3.° Sea 12334 que se ha de dividir por 1000.

Divido 12334 en dos grupos: el de la izquierda 12 es el cuociente; el de la derecha 334 es la resta con tres cifras, porque el divisor 1000 tiene tres ceros.

19. Si los dos términos de la division terminan en ceros, podemos sin alterar el cuociente suprimir todos los ceros del término que tenga menos, con tal que se suprima igual número en el otro.

Sea 335000 que se ha de dividir por 1500.

Suprimo dos ceros á la derecha de cada término: luego divido 3350 por 15, y hallo 270 por cuociente, como si se hubiese dividido 335000 por 1500. En efecto, 335000 son 3350 centenas, así como 1500 son 15 centenas. Ahora bien: dos números de centenas se contienen tantas veces como igual número de unidades sencillas. Luego 335000 contiene á 1500 tantas veces como 3350 contiene á 15; es decir, 270 veces.

20. Siendo la multiplicacion el producto de dos factores, es claro que dividiendo el producto por uno de los dos factores (multiplicando y multiplicador), debe hallarse el otro factor (multiplicador ó multiplicando).

Sea multiplicar 567 por 834: tenemos por producto 472878.

472878	567
1927	834
2268	*(Muliplicador).*
0	

1.° Divido el producto 472878 por 567, y tengo por cuociente 834, es decir, el multiplicador. En efecto, 472878 debe contener 834 veces al multiplicando; luego dividiendo 472878 en 567 partes iguales, una de estas partes, ó el cuociente, debe ser el multiplicador 834.

472878	834
5587	567
5838	*(Multiplicando).*
0	

2.° Divido el producto 472878 por 834, y tengo por cuociente 567, es decir, el multiplicando. En efecto, 472878 debe contener 567 veces al multiplicador: luego dividiendo 472878 en 834 partes iguales, una de estas partes, ó el cuociente, debe ser el multiplicando 567.

21. Indicando la division cuántas veces uno de sus dos términos está contenido en el otro, es claro que multiplicando el cuociente por el divisor, y añadiéndole la resta de la division, si la hubiere, se hallará el dividendo.

Sea 453 que se ha de dividir por 14.

453	14
33	32
5	

Tengo por cuociente 32, y por resta 5.

Para hacer la prueba de esta division, multiplico 14 por 32, y escribo la resta 5 debajo de la columna de las unidades antes de sumar los productos parciales, y obtengo así 453, ó sea el dividendo. En efecto, el dividendo contiene 32 veces 14 mas 5 unidades.

```
  14
  32
 ---
  28
 42
   5
 ---
 453
```

22. Se reconoce que un número es:

1.° *Divisible por* 2, cuando la primera cifra de la derecha es un número par, como 2, 4, 6, 8 ó 0. Así:

248 y 250 son divisibles por 2.

2.° *Divisible por* 3, cuando la suma de sus cifras es divisible por 3. Así:

249 es divisible por 3, porque la suma 15 de sus cifras 2, 4 y 9 es divisible por 3.

3.° *Divisible por* 4, cuando el número formado por la cifra de las decenas y la de las unidades es divisible por 4. Así:

2248 es divisible por 4, porque 48 es divisible por 4.

4.° *Divisible por* 5, cuando terminan en 0 ó en 5. Así: 220 y 2245 son divisibles por 5.

5.° *Divisible por* 6, cuando el número es par, y que además la suma de sus cifras es divisible por 3. Así: 2268 es divisible por 6, porque es par, y porque además la suma 18 de sus cifras es divisible por 3.

6.° *Divisible por* 8, cuando el número formado por la cifra de las centenas, de las decenas y de las unidades es divisible por 8. Así: 32664 es divisible por 8, porque 664 es divisible por 8.

7.° *Divisible por* 9, cuando la suma de sus cifras es divisible por 9. Así: 32365 es divisible por 9, porque la suma 18 de sus cifras es divisible por 9.

23. El número 9 goza de una propiedad particular: si se suman las cifras de un número, y de ellas se resta 9 tantas veces como sea posible, el resíduo de esta sustraccion será el mismo que si se dividiese por nueve el mismo número.

472988	9
	52554
22	
49	
48	
38	
2	

Digo: 4 y 7 son 11; 9 de 11 quedan 2: 2 y 2 son 4, y 9 son 13; 9 de 13 quedan 4: 4 y 8 son 12; 9 de 12 3: 3 y 8 son 11; 9 de 11 2; como haciendo la division comun.

24. Esta propiedad del número 9 da un medio de hacer la prueba de la multiplicacion y de la division.

1.° Para hacer la prueba de una multiplicacion por 9, se suman las cifras del multiplicando de izquierda á derecha, se quitan los nueves de la suma á medida que se puede, y se escribe la resta encima de la línea del multiplicando. Despues de hacer igual operacion con el multiplicador, se multiplican las dos restas una por otra sin escribir el producto. Súmanse las cifras de este producto quitando los nueves, lo que da una tercera resta, que se escribe debajo de las dos primeras. Finalmente, haciendo con el producto total lo mismo que con sus dos factores,

se obtiene una cuarta resta, que debe ser igual á la tercera si la multiplicacion está bien hecha.

Sea el ejemplo 567×834.

Multiplicando	567	0
Multiplicador	834	6
	2268	0
	1701	
	4536	
Producto. . . .	472878	0

Digo: 5 y 6 son 11; 9 de 11, 2; 2 y 7 son 9; 9 de 9, 0 que escribo frente al multiplicando; 8 y 3 son 11; 9 de 11, 2; 2 y 4 son 6, que escribo frente al multiplicador.

Multiplico las dos restas una por otra, es decir, 6 por 0, lo que me da 0.

Pasando ahora al producto total digo: 4 y 7 son 11, 9 de 11, 2; 2 y 2 son 4; 4 y 8 son 12; 9 de 12, 3; 3 y 7 son 10; 9 de 10, 1; 1 y 8 son 9; 9 de 9, 0.

Como la 4.ª resta es igual á la 3.ª, deduzco que el resultado de la multiplicacion es exacto.

2.° Para hacer la prueba de una division con el 9, se suman todas las cifras del divisor, se quitan los nueves á medida que se puede, y se escribe la resta encima de la misma línea: ejecútase lo mismo con el cuociente, y se multiplican las dos restas entre sí; se suman las cifras de este producto y se quitan los nueves, si se puede, obteniendo por este medio una tercera resta, que es igual á la del dividendo total, cuando la division ha sido bien hecha, y no dió resta alguna.

Si la division produjo resta, se suman las cifras de esta con la tercera resta de la prueba, y quitando siempre los nueves, se obtiene una cuarta resta, que en este caso debe ser igual á la del dividendo. La cuarta resta de la prueba se escribe á la izquierda de la resta de la division, y encima de la misma línea: la resta del dividendo se escribe tambien á la izquierda de este número y encima de la misma línea.

Sea 46531 : 337

1	46531	337	4
	1283		3
	2721	138	—
1	25		3

Digo en el divisor: 3 y 3 son 6 y 7 son 13: 9 de 13, 4.—En el cuociente: 1 y 3 son 4, y 8 son 12: 9 de 12, 3.

4 multiplicado por 3 da 12; 1 y 2 son 3.—Añado esta

3.ª resta 3 á las cifras 5 y 2 de la resta 25 de la division: 3 y 5 son 8 y 2 son 10: 9 de 10, 1.

Finalmente, digo en el dividendo, yendo tambien de derecha á izquierda: 1 y 3 son 4 y 5 son 9; 9 de 9, 0: 6 y 4 son 10; 9 de 10, 1.

Como esta resta 1 es igual á la 3.ª, deduzco que la division está bien hecha.

Cuando la prueba por 9 no sale bien, es evidente que la operacion está mal hecha; cuando sale bien, solo es probable que esté exacta, porque como la resta de una division de un número por 9 no varía cuando este número aumenta ó disminuye de un múltiplo de 9, resulta que cuando las faltas de cálculo son tales que el error total cometido en el resultado es un múltiplo de 9, la prueba por 9 no indica el error.

Sea probar 473373 es el producto de 567 por 834.

La prueba por 9 no indica ninguna falta de cálculo, y sin embargo el número 473373 no es el producto de 567 por 834, porque este producto es 472878. El error cometido es pues de 473373—472878 ó sea 99×5.

SECCION SEGUNDA.—DE LAS FRACCIONES COMUNES.

§. I. *De las fracciones ó quebrados en general.*

1. Se llama *fraccion ó quebrado* á cualquier cantidad menor que la unidad.

2. Las fracciones sacan su orígen de las divisiones que no pueden efectuarse exactamente en números enteros.

Sea 17 dividido por 3: se halla el cuociente 5 con la resta 2. Pero 5 no es la tercera parte de 17: para obtenerla completamente es necesario dividir todavía la resta 2 en 3 partes iguales, y tomar 2 de estas partes para unirlas al cuociente 5. La resta 2 dividida en 3 partes es una fraccion.

3. Las fracciones ó quebrados se escriben colocando uno debajo de otro sus dos números, que se separan con una raya en esta forma $\frac{2}{3}$.

4. El número inferior 3 se llama *denominador*, é indica en cuántas partes iguales está dividida la unidad. El número superior se llama *numerador*, é indica cuántas de

estas partes iguales se toman. El *numerador* y *denominador* son los dos *términos* del quebrado.

5. Para enunciar una fraccion, se enuncia desde luego el numerador con los números cardinales (y luego el denominador con los partitivos, hasta 10, continuando luego con los cardinales), á quienes se añade la partícula *avos*. Así:

$\frac{7}{8}$ se enuncia *siete octavos* y $\frac{5}{12}$ *cinco doce avos*.

6. Si el quebrado se compone de dos términos iguales, es igual á la unidad, sean cuales fueren dichos términos.

Así: las fracciones $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}$ son iguales cada una á la unidad y por consiguiente iguales entre sí.

Si el numerador es mayor que el denominador, el quebrado se llama *número fraccionario*.

Tal es el quebrado $\frac{7}{5}$. En efecto: $\frac{7}{5}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}$; pero $\frac{5}{5}=1$: luego $\frac{7}{5}$ es mayor que la unidad $\frac{2}{5}:\frac{7}{5}$ es pues un número *fraccionario*, ó un quebrado impropio, como generalmente se dice.

7. Un quebrado puede considerarse de dos maneras: 1.º como el cuociente de una division del numerador por el denominador; 2.º como la expresion de las partes iguales que se toman de entre las en que una unidad se haya dividido.

8 1.º Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número entero, el quebrado se hace tantas veces mayor como unidades haya en dicho número.

Sea $\frac{5}{7}$: multiplicando el numerador por 5, tenemos $\frac{25}{7}$, fraccion 5 veces mayor que $\frac{5}{7}$, porque las partes iguales del denominador han quedado inalterables; esto es, las mismas, y se han tomado 5 veces mas de dichas partes.

2.º Si se multiplica el denominador por un número entero, la fraccion se hace tantas veces menor, cuantas sean las unidades de dicho número.

Sea $\frac{5}{7}$: multiplicando el denominador por 5, tenemos $\frac{5}{35}$, fraccion 5 veces menor que $\frac{5}{7}$, porque no se toman mas que las mismas cinco partes, y estas partes se han hecho 5 veces mas pequeñas.

3.° Si se multiplican por un mismo número los dos términos de un quebrado, este no muda de valor.

Sea $\frac{5}{7}$: multiplicando el numerador por 5, la fraccion se hace cinco veces mayor, y multiplicando por 5 el denominador se hace 5 veces menor: hay, pues, compensacion, y por consiguiente la fraccion no cambia de valor.

Así: $\frac{5}{7}=\frac{25}{35}$.

9. 1.° Si se divide el numerador de un quebrado por un número entero, el quebrado se hace tantas veces menor como unidades hay en dicho número.

Sea $\frac{25}{35}$: dividiendo el numerador por 5, tenemos $\frac{5}{35}$, fraccion 5 veces menor que $\frac{25}{35}$, porque las partes del denominador han quedado las mismas y se han tomado 5 veces menos.

2.° Si se divide el denominador de una fraccion por un número entero, la fraccion se hace tantas veces mayor como unidades hay en dicho número.

Sea $\frac{25}{35}$: dividiendo el denominador por 5, tenemos $\frac{25}{7}$, fraccion cinco veces mayor que $\frac{25}{35}$, porque se toman igual número de partes, y estas se han hecho 5 veces mayores.

3.° Si se dividen por un mismo número los dos términos de un quebrado, este no muda de valor.

Sea $\frac{25}{35}$: dividiendo el numerador por 5, la fraccion se hace 5 veces menor; pero dividiendo tambien por 5 el denominador, la misma fraccion se hace 5 veces mayor. Hay, pues, compensacion, y la fraccion no ha cambiado de valor.

Así: $\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$.

10. Se reduce un número entero á quebrado de un denominador dado, multiplicando el entero por el denominador dado, y el producto expresará el numerador de la fraccion pedida. Así:

5 reducido á tercios da $\frac{5\times3}{3}$ ó $\frac{15}{3}$; y reducido á séptimos $\frac{5\times7}{7}$ ó $\frac{35}{7}$.

Si el entero está unido á una fraccion, se le multiplica por el denominador de esta, añadiendo al producto su numerador. Así:

$5+\frac{5}{7}=\frac{5\times7+5}{7}$ ó $\frac{40}{7}$.

11. Se sacan los enteros contenidos en un número fraccionario dividiendo el numerador por el denominador: el cuociente dará los enteros buscados, y la resta, si la hubiere, será el numerador de un nuevo quebrado, cuyo denominador es el del número fraccionario.

Sea $\frac{40}{7}$: 40 dividido por 7 da 5 en el cuociente y 5 de resta: luego $\frac{40}{7}=5+\frac{5}{7}$.

§. II. *Comparacion de las fracciones ó reduccion de las fracciones á un comun denominador.*

1. Si dos fracciones tienen el mismo nombre, es decir, el mismo denominador, se las compara comparando

sus numeradores: la que tiene mayor numerador es la mayor: sean los quebrados $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$.

$\frac{5}{7}$ es una fraccion mayor que $\frac{3}{7}$, porque entrambas expresan sétimas, y hay 5 en la una y 3 en la otra.

Si las dos fracciones tienen denominadores diferentes, es preciso para compararlas fácilmente *reducirlas á un mismo denominador*, es decir, darlas el mismo nombre.

2. Para reducir dos quebrados á un mismo denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el denominador del otro. De aquí resultan dos nuevas fracciones iguales á las primeras, que tienen por denominador comun el producto de los dos denominadores dados.

Sean los quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{6}{7}$, que se han de reducir á un mismo denominador.

$$\frac{4\times7}{5\times7}=\frac{28}{35}.$$

Multiplico los dos términos 4 y 5 de la primera fraccion por 7, y tengo $\frac{28}{35}$, fraccion igual á $\frac{4}{5}$.

$$\frac{6\times5}{7\times5}=\frac{30}{35}.$$

Multiplico los dos términos 6 y 7 de la segunda fraccion por 5, y tengo $\frac{30}{35}$, fraccion igual á $\frac{6}{7}$.

Se ve, pues, que $\frac{30}{35}$ es mayor que $\frac{28}{35}$, y por consiguiente $\frac{6}{7}$ mayor que $\frac{4}{5}$.

3. Para reducir á un mismo denominador un número cualquiera de quebrados, se multiplican los dos términos de cada uno por los denominadores, ó por el producto de los denominadores de todos los demás, lo que no altera

el valor de los quebrados primitivos. Sean $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$ que se han de reducir á un comun denominador.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times4\times6\times12}{3\times4\times6\times12}=\frac{576}{864}$$

Los dos términos 2 y 3 de la primera fraccion multiplicados por los denominadores 4, 6, 12 de las otras tres fracciones, dan $\frac{576}{864}$, fraccion igual á $\frac{2}{3}$.

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times6\times12}{4\times3\times6\times12}=\frac{648}{864}$$

Los dos términos 3 y 4 de la segunda fraccion multiplicados por los denominadores 3, 6, 12 de las otras tres fracciones, dan $\frac{648}{864}$, fraccion igual á $\frac{3}{4}$.

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times3\times4\times12}{6\times3\times4\times12}=\frac{720}{864}$$

Los dos términos 5 y 6 de la tercera, multiplicados por los denominadores 3, 4, 12 de las otras tres, dan $\frac{720}{864}$, fraccion igual á $\frac{5}{6}$.

$$\frac{11}{12}=\frac{11\times3\times4\times6}{12\times3\times4\times6}=\frac{792}{864}$$

Los dos términos 11 y 12 de la cuarta, multiplicados por los denominadores 3, 4, 6 de las otras tres, dan $\frac{792}{864}$, fraccion igual á $\frac{11}{12}$.

Se puede formar desde luego el producto de los denominadores 4, 6 y 12 ó 288; 3, 6 y 12 ó 216; 3, 4 y 12 ó 144; 3, 4 y 6 ó 72, para multiplicar por este producto los dos términos de la primera, segunda, tercera y cuarta fraccion, y se obtendrá el mismo resultado:

$$\frac{2\times288}{3\times288}=\frac{576}{864}\Bigg|\frac{3\times216}{4\times216}=\frac{648}{864}\Bigg|\frac{5\times144}{6\times144}=\frac{720}{864}\Bigg|\frac{11\times72}{12\times72}=\frac{792}{864}.$$

Se ve, pues, que el quebrado $\frac{11}{12}$ es mayor que $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$ mayor que $\frac{3}{4}$, y $\frac{3}{4}$ mayor que $\frac{2}{3}$.

4. Reducir las fracciones al menor denominador comun, es dar á todas ellas por denominador el múltiplo menor de cada denominador particular que lo sea al propio tiempo de todas.

5. Para hallar el menor denominador comun se examina si el múltiplo menor del mayor denominador particular es tambien múltiplo de cada uno de los demás: si no lo fuese, se hará igual exámen para el segundo múltiplo del mismo número, luego para el tercero, para el cuarto, etc., y se llega así necesariamente á hallar el múltiplo menor de cada denominador particular.

Sean $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{10}$.

El mayor denominador es 10. Digo pues: 10, el menor múltiplo de 10 no es múltiplo de 6; 20, segundo múltiplo de 10, tampoco es múltiplo de 6; pero 30, tercer múltiplo de 10, es á la vez múltiplo de 6 y de 2; luego 30 es el menor denominador comun á que pueden reducirse las fracciones propuestas.

Una vez hallado el menor denominador comun, es preciso para reducir á él los quebrados, multiplicar los dos términos de cada uno por el número de veces que su denominador particular está contenido en el denominador comun.

30 es el denominador comun de los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{10}$.

Ahora bien: 30 contiene 15 veces á 2: multiplico por 15 los términos de la fraccion $\frac{1}{2}$, $\frac{1\times15}{2\times15}=\frac{15}{30}$ y tengo $\frac{15}{30}$.

30 contiene 5 veces á 6: multiplico por 5 los dos términos de la fraccion $\frac{5}{6}$, $\frac{5\times5}{6\times5}=\frac{25}{30}$ y tengo $\frac{25}{30}$.

30 contiene 3 veces á 10: multiplico por 3 los términos de la fraccion $\frac{4}{10}$, $\frac{4\times3}{10\times3}=\frac{12}{30}$ y tengo $\frac{12}{30}$.

Así los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{10}$, reducidos á su menor denominador comun, se cambian, sin alterar su valor, en $\frac{15}{30}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{12}{30}$.

§. III. *Simplificacion de los quebrados ó reduccion á su mas sencilla expresion.*

1. Dícese que una fraccion es *reductible* cuando sus dos términos son divisibles por un mismo número, lo que la simplifica sin cambiar su valor.

Sea $\frac{30}{42}$: la division de estos dos términos por 6 dan una fraccion mas sencilla, equivalente á $\frac{5}{7}$.

2. Una fraccion se llama *irreductible* cuando no puede simplificarse. Tal es por ejemplo, $\frac{6}{7}$.

3. En general se puede simplificar una fraccion dividiendo sus dos términos por 2 cuantas veces sea posible, luego los cuocientes por 3, y los siguientes por 5, por 7, etc., y siempre cuantas veces sea posible. Se continúan estas divisiones sucesivas hasta tanto que se llegue á dos cuocientes que no puedan ya ser divididos por un mismo número, no siendo por 1. Estos últimos resultados forman los términos de una nueva fraccion, que es la mas *sencilla expresion* de la fraccion dada, que le es igual.

Sea simplificar la fraccion $\frac{3780}{15120}$.

$\frac{3780:2}{15120:2}=\frac{1890}{7560}$. Divido los dos términos por dos, y tengo una nueva fraccion mas sencilla que la primera.

$$\frac{1890:2}{7560:2}=\frac{945}{3780}.$$

Divido los cuocientes por **2**, y tengo una tercer fraccion mas sencilla aun que la segunda.

$$\frac{945:3}{3780:3}=\frac{315}{1260}.$$

No siendo ya posible la division por 2, divido los cuocientes por 3, y tengo una cuarta fraccion mas sencilla todavía que la tercera.

$$\frac{315:3}{1260:3}=\frac{105}{420}.$$

Divido aun por 3, y tengo una quinta fraccion mas sencilla que la cuarta.

$$\frac{105:3}{120:3}=\frac{35}{140}.$$

Divido de nuevo por 3, y tengo una sesta fraccion mucho mas sencilla que la quinta.

$$\frac{35:5}{140:5}=\frac{7}{28}.$$

No siendo ya posible la division por 3, divido los cuocientes por 5, y obtengo una fraccion mas sencilla todavía que la sesta.

$$\frac{7:7}{28:7}=\frac{1}{4}.$$

La division por 5, no siendo ya posible, divido los cuocientes por 7, y obtengo una octava fraccion mucho mas sencilla que la sétima.

$\frac{1}{4}$ es pues la *sencilla expresion* de $\frac{3780}{15120}$, porque un cuarto no puede ya dividirse por un mismo número como no sea por **1**.

4. Un número se llama *primo* cuando solo es divisible por sí mismo ó por la unidad: tales son los números.

2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.

5. Dícese que dos números *son primos entre sí* cuando no tienen factor comun. Así:

10 y **21**; ó **2**, **5** y 3, **7** son primos entre sí.

6. Llámase *divisor comun* al número que divide separadamente á otros dos. Así:

Los números 2, 3, 6, 8, 12, que dividen separadamente á 24 y 72, son comunes divisores de estos dos números.

El *máximo comun divisor* de dos números es el mayor número que separadamente los divide. Así:

12, siendo el mayor número que divide separadamente á 24 y 72, es su máximo comun divisor.

7. El medio de hallar el *máximo comun divisor* está basado en los cuatro principios siguientes:

1.° Todo divisor comun de dos números divide exactamente su suma.

12 divide á 24, y divide tambien á 72: digo que dividirá igualmente á 96, suma de 24 y 72.

En efecto, 24 es igual á 12 repetido dos veces: 72 es tambien igual á 12 repetido 6 veces: luego 96 ó 24+72 es igual á 12 repetido 2 veces, mas 6 veces, ó á 8 veces: luego 96 es múltiplo de 12: luego es divisible por 12.

2.° Todo divisor comun de dos números divide exactamente su diferencia.

72 y 24 son divisibles por 12: digo que 12 dividirá tambien á 48, diferencia entre 72 y 24.

En efecto, 72 es igual á 12 repetido 6 veces: 24 es tambien igual á 12 repetido 2 veces: luego 48 ó 72—24 es igual á 12 repetido 6 veces, menos 2 veces, ó á 4 veces: luego 48 es divisible por 12.

3.° Todo divisor de un número divide exactamente sus múltiplos.

12 que divide á 24, divide tambien 2 veces 24 ó 48; 3 veces 24 ó 72, y 4 veces 24 ó 96.

24 es igual á 12 repetido dos veces: luego 48 es igual á 12 repetido 4 veces: 72 es igual á 12 repetido 6 veces; y 96 igual á 12 repetido 8 veces, etc.

4.° El *máximo comun divisor* de dos números, lo es tambien del menor número y de la resta, resultado de su division.

Sean los dos números 336 y 126:

$$\begin{array}{r|l} 336 & 126 \\ \cline{2-2} & 2 \\ 84 & \end{array}$$

Dividiendo 336 por 126, tengo por cuociente 2 y 84 de resta. Digo que el máximo comun divisor entre 336 y 126 es asimismo máximo comun divisor entre 126 y 84.

En efecto, 336=126×2+84. Ahora bien: todo número que divide á 126 divide tambien á 126×2 (primer principio). Si además dicho número divide á 336 dividirá tambien á 84, diferencia en 336 y 126×2 (segundo principio). Luego todos los divisores comunes de 336 y 126 lo serán tambien de 126 y 84.

Recíprocamente todos los divisores comunes de 84 y 126 dividen á 84 y 126×2, y dividirán por consiguiente á 336, suma de 126×2 y de 84 (primer principio). Luego todos los divisores comunes de 84 y 126 son tambien divisores comunes de 126 y de 136: luego el máximo comun divisor de 336 y de 126 es asimismo máximo comun divisor del menor número 126 y de la resta 84.

8. *Regla general para hallar el máximo comun divisor.* Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor: si no queda resta, el mas pequeño será el máximo comun divisor buscado; si queda resta, se divide el menor número por la resta, y si la division se hace exactamente, la primera resta será el máximo comun divisor buscado.

Si la segunda division da una nueva resta, se divide la primera resta por la segunda, y si la tercera es 0, la segunda será el máximo comun divisor buscado. No siendo 0, se divide la segunda por la tercera, y se continúa así dividiendo las restas las unas por las otras hasta tanto que se obtenga un cuociente exacto. La resta que divide la precedente será el máximo comun divisor pedido.

Sea hallar el máximo comun divisor de dos números, tales como 2466 y 642. Se dispone la operacion así:

Cuocientes.		3	1	5	3	2	2
Dividendos y divisores. . .	2466	642	540	102	30	72	6
Restas.	540	102	30	12	6	0	

Divido 2466, y tengo 3 por cuociente y 540 por primera resta. Divido 642 por 540, y tengo por cuociente 1 y por segunda resta 102. Divido 540 por 102, y tengo 5 por cuociente y 30 por tercera resta. Divido 102 por 30, y tengo por cuociente 3 y por cuarta resta 12. Divido 30 por 12, y tengo 2 por cuociente y 6 por quinta resta. Divido 12 por 6, y tengo por cuociente 2 y por resta 0. El máximo comun divisor de 2466 y 642, es, pues, 6.

En efecto, segun el cuarto principio, siendo 6 el máximo comun divisor entre 6 y 12, lo es tambien entre 12 y 30; entre 30 y 102; entre 102 y 540; entre 540 y 642, y finalmente, entre 642 y 2466.

9. Cuando dos números *son primos entre sí*, el buscar su máximo comun divisor conduce necesariamente á hallar una resta igual á la unidad.

10. Puede conocerse de tres modos que dos números dados no tienen máximo comun divisor.

1.° Cuando dos restas consecutivas producen números *primos entre sí.*

2.° Cuando se encuentra una resta con números primos y que no divide á la resta precedente.

3.° Cuando se obtiene una resta igual á la unidad.

Sean los dos números 607 y 107:

Cuocientes..	607	5	1	2	17
Dividendos y divisores. . .	607	107	72	35	2
Restas..	72	35	2	1	

Las dos restas consecutivas 72 y 35 son números primos entre sí, cuyos números 607 y 107 no tienen máximo comun divisor.

La resta 2 es primo y no divide la resta precedente 35. Luego, etc. (1.°)

Finalmente, la division de 35 por 2 da por resta 1. Luego, etc. (3.°)

§. IV. *Adicion de las fracciones y de los números fraccionarios.*

1. La adicion ó suma de los quebrados presenta dos casos: ó los quebrados tienen un mismo denominador, ó bien le tienen diferente.

2. 1.° Si los quebrados tienen un mismo denominador, se suman los numeradores, y se da á la suma por denominador el denominador comun, por la razon que una suma debe llevar el mismo nombre que los números que la componen. Así:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2+3+1}{7}=\frac{6}{7}.$$

2.° Si los quebrados tienen denominadores diferentes, se reducen desde luego á un mismo denominador, se suman en seguida los numeradores, y se da á la suma el denominador comun.

Sean las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}$:

El menor denominador comun es 12. Las tres primeras fracciones modificadas se convierten en $\frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{10}{12}$, que se añaden á $\frac{10}{12}$. Tenemos, pues, $\frac{6+4+10+10}{12}=\frac{30}{12}$.

3. Cuando el resultado de la adicion da un número fraccionario, como $\frac{30}{12}$, se sacan los enteros y se simplifica lo mas posible. Así:

$$\frac{30}{12}=2+\frac{6}{12}: \text{ y } \frac{6}{12}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}: \text{ luego } \frac{30}{12}=2+\frac{1}{2}.$$

La adicion de los números fraccionarios presenta dos casos. Si tienen dos términos, como $\frac{30}{12}$, se procede como con los quebrados; si están compuestos de enteros y quebrados separados, se escriben los unos debajo de los otros de manera que los enteros estén en columna y los quebrados tambien: se reducen los quebrados á su menor denominador comun; luego haciendo de estos quebrados una nueva columna á la derecha, se suman y se extraen de la suma las unidades enteras para sumarlas con la columna de los enteros. Se escribe la fraccion del cuociente, si la hay, debajo de la columna de las fracciones dadas; y finalmente, se suman los enteros.

Sean para sumar los números fraccionarios

$$15\frac{3}{8}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{6}{12}:$$

15	3	8	9	
2	1	4	6	24
3	6	12	12	
1	1	8	27	24
21	1	8		

El menor denominador comun es 24. Las fracciones se convierten por consiguiente en $\frac{9}{24}, \frac{6}{24}, \frac{12}{24}$; su suma es $\frac{27}{24}$.

Pero $\frac{27}{24}=1\frac{3}{24}$ ó $1\frac{1}{8}$: escribo, pues, $\frac{1}{8}$ debajo de la columna de las fracciones primitivas, y llevo 1 para la de los enteros, obteniendo de este modo $21\frac{1}{8}$ para la suma pedida.

5. La prueba de la adicion se hace para los números quebrados como para los enteros: sin embargo, si se emplea la sustraccion, es preciso tener cuidado de dar la forma fraccionaria á la resta de la columna de las unidades enteras para añadir á la fraccion de la suma. Así en el ejemplo precedente.

La resta de las unidades enteras da 1. Ahora bien: $1=\frac{8}{8}$ ó $\frac{24}{24}$, que unidos á $\frac{3}{24}$ de la suma, hacen $\frac{27}{24}$: quitando $\frac{27}{24}$ de la suma de las fracciones modificadas, se tiene 0 por resta, y por consiguiente la operacion ha sido probablemente bien hecha.

§. V. *Sustraccion de los quebrados y de los números fraccionarios.*

1. La sustraccion de las fracciones presenta dos casos: ó las fracciones tienen un mismo denominador, ó los denominadores son diferentes.

2. 1.° Si los quebrados tienen un mismo denominador, se resta el menor numerador del mayor, y se pone á la diferencia por denominador, el denominador comun, en razon de que una diferencia debe tener el mismo nombre que los números que la dan.

Sea $\frac{2}{15}$ que se ha de restar de $\frac{7}{15}$.

Quito el menor numerador 2 del mayor 7: la diferencia es 5: coloco debajo del 5 el denominador comun 15, y tengo por resta $\frac{5}{15}$ ó $\frac{1}{3}$.

2.° Si los quebrados no tienen un mismo denominador, se comienza por reducirlos á él, y la sustraccion se hace en seguida como en el caso precedente.

Sea $\frac{2}{7}$ que se ha de restar de $\frac{3}{5}$:

Reduzco $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$ al mismo denominador, y obtengo $\frac{21}{35}$ y $\frac{10}{35}$: ahora $21-10=11$ la diferencia, pues, de estos quebrados es de $\frac{11}{35}$.

3. La sustraccion de los números fraccionarios presenta dos casos:

1.° Si los números fraccionarios son de dos términos, se procede como con los quebrados comunes. Así:

$$\frac{21}{15}-\frac{6}{5}=\frac{105-90}{75}=\frac{15}{75}=\frac{1}{5}.$$

2.° Si los números fraccionarios se componen de enteros y quebrados separados, se escribe el menor debajo del mayor: se reducen los quebrados á un mismo denominador, se resta el que pertenece al menor número, del que pertenece al mayor, se escribe el quebrado restante debajo de los quebrados dados, y se continúa la operacion como en la sustraccion de los números enteros.

Cuando el quebrado que se ha de restar es mayor, se toma del mayor entero una unidad, que se une al quebrado menor.

Sea $23\frac{9}{10}$ que se ha de restar de $67\frac{3}{8}$.

$$\begin{array}{rr|rrr|r}
67 & 3 & 8 & 15 & 55 & 40 \\
23 & 9 & 10 & 36 & 36 & \\
\hline
43 & 19 & 40 & & 19 & 40
\end{array}$$

Dispongo la operacion como para la suma.

El menor denominador comun es 40. Los quebrados quedan pues convertidos en $\frac{15}{40}$ y $\frac{36}{40}$. Como 36 no puede restarse

de 15, tomo del número 67 una unidad que vale $\frac{40}{40}$: añado á 40, 15, y tengo 55: resto ahora 36 de 55, y obtengo por resta 19, á quien doy por denominador 40: pasando en seguida á los enteros, resto 23 mas 1 de 67, y tengo por resta 43. Luego la diferencia es $43\frac{19}{40}$.

La prueba de esta operacion se hace como con los números enteros.

4. Para restar un quebrado de un entero, se sustrae de una unidad del entero convertido en quebrado del mismo denominador, disminuyendo al entero en dicha unidad.

Sean $\frac{5}{6}$ que se han de restar de 9:

$$9=8+\frac{6}{6}$$

$$\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

$$9-\frac{5}{6}=8+\frac{1}{6}$$

Tomo del número 9 una unidad entera, que vale $\frac{6}{6}$, resto $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{6}$ y tengo por resta $\frac{1}{6}$: luego $9-\frac{5}{6}=8+\frac{1}{6}$.

§. VI. *Multiplicacion de los quebrados y de los números fraccionarios.*

1. La multiplicacion de los quebrados presenta tres casos: 1.° multiplicar un quebrado por un entero; 2.° multiplicar un entero por un quebrado; 3.° multiplicar un quebrado por otro quebrado.

2. Multiplicar un quebrado por un entero es hacer el quebrado tantas veces mayor como unidades contiene el número entero.

Para multiplicar un quebrado por un entero es preciso, ó multiplicar su numerador, ó dividir su denominador por el entero, porque se hace un quebrado 2, 3, 4... veces mayor, haciendo su numerador 2, 3, 4... veces mayor, ó su denominador 2, 3, 4... veces menor. Se pone al producto por denominador el del quebrado multiplicando y al cuociente el numerador del quebrado multiplicador.

Sea $\frac{3}{8}$ que se ha de multiplicar por 2:

1.° $\frac{3}{8}\times2=\frac{3\times2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. 1.° Multiplico el numerador 3 por 2, y debajo del producto 6 coloco el denominador 8: el producto es, pues, $\frac{6}{8}$ ó $\frac{3}{4}$.

2.° $\frac{3}{8}\times2=\frac{3}{8:2}=\frac{3}{4}$. 2.° Divido el denominador 8 por 2, y encima del cuociente 4 coloco el numerador 3, y el producto es por consiguiente $\frac{3}{4}$.

3. Multiplicar un entero por un quebrado es tomar de este número la parte que indica el quebrado.

Para multiplicar un entero por un quebrado se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y se pone al producto por denominador el de la fraccion multiplicador.

Sea 4 que se ha de multiplicar por $\frac{5}{12}$:

$4\times\frac{5}{12}=\frac{4\times5}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$. Multiplico 4 por 5, y debajo del producto 20 pondré el denominador 12, lo que da $\frac{20}{12}$ ó $\frac{5}{3}$ ó $1\frac{2}{3}$.

En efecto, multiplicar 4 por $\frac{5}{12}$ es tomar los $\frac{5}{12}$ de 4: la dozava parte de 4 es $\frac{4}{12}$: luego la dozava parte de 4 repetido 5 veces, hace $\frac{20}{12}$ ó $1\frac{2}{3}$.

4. El producto es mayor que el multiplicando cuando el multiplicador sea mayor que la unidad.

Al contrario, el producto es menor que el multiplicando cuando el multiplicador es menor que la unidad.

5. Multiplicar un quebrado por otro quebrado es tomar del quebrado multiplicando la parte indicada por el quebrado multiplicador.

Para multiplicar un quebrado por otro es preciso hallar sucesivamente el producto de los numeradores y de los denominadores: estos productos serán el numerador y denominador del quebrado, que expresará el producto de los quebrados propuestos.

Sea $\frac{3}{4}$ que se ha de multiplicar por $\frac{4}{5}$:

$3\times4=12$, producto de los numeradores.
$4\times5=20$, producto de los denominadores.
$\frac{3\times4}{4\times5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$, producto de los dos quebrados.

En efecto, si hubiésemos de multiplicar $\frac{3}{4}$ por 4, seria preciso multiplicar 3 por 4, y tendriamos $\frac{12}{4}$; pero en el presente caso no es por 4, sino por $\frac{4}{5}$ por quien hemos de multiplicar el quebrado. Al multiplicar por 4 le hicimos 4 veces mayor; por consiguiente, para reducirle á su justo valor, es preciso dividirle por 5, es decir, multiplicar por 5 el denominador del quebrado multiplicando, lo que da $\frac{12}{4\times5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

6. El producto de dos fracciones es menor que cada factor. En efecto, cuando el multiplicador está expresado por 1, 2, 3... unidades, el producto se compone de 1, 2, 3... veces el multiplicando, y si el multiplicador está por el contrario expresado por $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, el producto solo debe componerse de la cuarta, de la mitad ó de las tres cuartas partes del multiplicando. Lo mismo sucede con respecto al multiplicador. Así en el ejemplo precedente:

El producto $\frac{3}{5}$ ó $\frac{12}{20}$ es menor que $\frac{3}{4}$ ó $\frac{15}{20}$ multiplicando, y que $\frac{4}{5}$ ó $\frac{16}{20}$ multiplicador.

7. Llámanse *quebrados de quebrados* á una série de fracciones que dependen las unas de las otras, como los $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{5}$, los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{9}$.

Se valúan los *quebrados de quebrados* multiplicando entre sí todos los términos correlativos. Así:

Los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}$ ú $\frac{8}{15}$. En efecto, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ es tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, puesto que el multiplicador es los $\frac{2}{3}$ de la unidad.

Los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{9}=\frac{3\times5\times7}{4\times6\times9}$ ó $\frac{105}{216}=\frac{35}{72}$. En efecto, multiplicar $\frac{5}{6}$ por $\frac{3}{4}$ es tomar los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$; multiplicar $\frac{7}{9}$ por $\frac{5}{6}$ es tomar los $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{9}$; luego para tomar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{9}$ es preciso multiplicar respectivamente los numeradores y denominadores unos por otros.

8. La multiplicacion de los números fraccionarios presenta dos casos. Si tienen dos términos, como $\frac{15}{6}$ y $\frac{17}{9}$, se procede como con los quebrados. Si son compuestos de enteros y quebrados separados, se les convierte en números fraccionarios de dos términos para multiplicarlos en seguida como los quebrados.

Sea multiplicar $2\frac{3}{5}$ por $4\frac{2}{7}$:

$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$. Convierto los $2\frac{3}{5}$ en un número fraccionario de dos términos, y tengo $\frac{13}{5}$.

$4\frac{2}{7}=\frac{30}{7}$. Hago lo mismo con $4\frac{2}{7}$, y tengo $\frac{30}{7}$.

$\frac{13}{5}\times\frac{30}{7}=\frac{390}{35}$. Multiplicando ahora los $\frac{13}{5}$ por $\frac{30}{7}$ obtengo $\frac{390}{35}$, ó $\frac{78}{7}=11\frac{1}{7}$.

9. En las operaciones de quebrados ó de números fraccionarios es preciso antes de comenzarlas reducir los quebrados á su mas simple expresion, ó simplificarlos. Por este medio los cálculos, aun los complicados, se reducen á poca cosa.

Sea tomar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{5}$ de $\frac{8}{9}$ de 5. Tenemos, segun lo expuesto en el número 7,

$\frac{3\times4\times8\times5}{4\times5\times9\times1}$ Pero los factores 4 y 5 son comunes en el numerador y en el denominador; por consiguiente podemos quitarlos. Además, el 3 del numerador es un factor de 9 que se halla en el denominador. De que resulta que $\frac{3\times4\times8\times5}{4\times5\times9\times1}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

10. Todas las reglas dadas para la multiplicacion de los quebrados y de los números fraccionarios, pueden reducirse á una: *multiplicar el numerador del multiplicando por el numerador del multiplicador, y el resultado será el numerador del producto; y multiplicar el denominador del multiplicando por el denominador del multiplicador, y el resultado será el denominador del producto.*

En el caso de multiplicar un entero por un quebrado, ó vice-versa, se considerará el entero como teniendo por denominador la unidad.

En los números fraccionarios de dos términos, se reducirán á solo un término. Ejemplos:

1.° $\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$. Multiplico el numerador 3 del multiplicando por el numerador 3 del multiplicador, y tengo por resultado 9 para numerador del producto. Multiplico en seguida 4, denominador del multiplicando, por 5, denominador del multiplicador, y tengo 20 por denominador del producto.

2.° $8\times\frac{3}{4}=\frac{8\times3}{1\times4}=\frac{24}{4}=6$. Convierto el multiplicando 8 en la fraccion $\frac{8}{1}$, y ejecuto la operacion como en el caso anterior.

3.° $\frac{3}{4}\times8=\frac{3\times8}{4\times1}=\frac{24}{4}=6$. Convierto el multiplicador 8 en la fraccion $\frac{8}{1}$, y ejecuto la operacion como las dos anteriores.

4.° $2\frac{1}{2}\times3\frac{1}{4}=\frac{5\times13}{2\times4}=\frac{65}{8}=8+\frac{1}{8}$. Reduzco á un solo término los números fraccionarios, y ejecuto el cálculo como queda indicado.

§. VII. *Division de los quebrados y de los números fraccionarios.*

1. La division de los quebrados presenta tres casos: 1.° dividir un quebrado por un entero; 2.° dividir un entero por un quebrado; 3.° dividir un quebrado por otro.

2. Para dividir un quebrado por un entero es preciso, ó dividir su numerador, ó multiplicar su denominador por el número entero. En efecto, dividir un quebrado por 2, 3, 4..... es hacerle 2, 3, 4.... veces menor. Es así que un quebrado se hace 2, 3, 4..... veces menor dividiendo su denominador ó multiplicando su denominador por 2, 3, 4.... luego efectuando esta operacion, y dando al cuociente el denominador del quebrado dividendo, ó al producto el numerador del quebrado divisor, habremos conseguido la division.

Sea $\frac{8}{9}$ que se ha de dividir por 4.

1.° $\frac{8}{9}:4=\frac{8:4}{9}=\frac{2}{9}$. 1.° Divido el numerador 8 por 4, y debajo del cuociente 2 coloco el denominador 9, y tengo $\frac{2}{9}$.

2.° $\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9\times4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$. 2.° Multiplico el denominador 9 por 4, y encima del producto coloco el numerador 8, lo que da $\frac{8}{36}$ ó $\frac{2}{9}$.

3 Para dividir un número entero por un quebrado, se invierte el quebrado y se multiplica por el entero.

Sea dividir 4 por $\frac{8}{9}$:

$4:\frac{8}{9}=4\times\frac{9}{8}=\frac{36}{8}$ ó $4\frac{1}{2}$. Invierto la fraccion, y tengo que multiplicar 4 por $\frac{9}{8}$. El producto $\frac{36}{8}$ ó $4\frac{1}{2}$ es el cuociente buscado.

En efecto, si yo tuviese que dividir 4 por 8, el cuociente seria $\frac{4}{8}$; pero el divisor $\frac{8}{9}$ es nueve veces menor que 4: el cuociente debe ser, pues, nueve veces mayor que $\frac{4}{8}$, es decir, $\frac{4}{8}\times9$ ó $\frac{36}{8}=4\frac{1}{2}$.

4. Para dividir un quebrado por otro, se multiplicará el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.

Sea $\frac{3}{4}$ que se ha de dividir por $\frac{7}{8}$:

Segun la regla que precede, es necesario dividir $\frac{3}{4}$ por 7, lo que dá $\frac{3}{4\times7}$; y como $\frac{7}{8}$, quebrado divisor, es 8 veces menor que 7, el cuociente deberá ser 8 veces mayor, por lo cual tendremos que multiplicar este resultado por 8; el cuociente será entonces $\frac{3\times8}{4\times7}$. Pero $\frac{3\times8}{4\times7}$ puede considerarse como el producto de $\frac{3}{4}$ por $\frac{8}{7}$, y $\frac{8}{7}$ es la fraccion divisor invertida. Se tiene pues $\frac{24}{28}$ ó $\frac{6}{7}$.

5. Si el divisor es un número entero, el cuociente será menor que el quebrado dividendo, y mayor, si el divisor es un quebrado.

6. Cuando se divide la unidad por un quebrado, el cuociente es igual á este quebrado invertido. Así:

$$1:\frac{5}{7}=1\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5}.$$

7. La division de los números fraccionarios de dos términos se hace absolutamente como la de los quebrados. Si tienen enteros y quebrados separados, se convierten en números fraccionarios de dos términos y se dividen como los primeros.

Sea dividir $4\frac{2}{7}$ por $2\frac{3}{5}$.

$4\frac{2}{7}=\frac{30}{7}$. Convierto los $4\frac{2}{7}$ y $2\frac{3}{5}$ en números de dos términos.

$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$ $\frac{30}{7}$ y $\frac{13}{5}$; divido $\frac{30}{7}$ por $\frac{13}{5}$, y tengo

$$\frac{30}{7}\times\frac{5}{13}=\frac{150}{91}=1\frac{50}{91}.$$

8. Todas las reglas dadas para la division de los quebrados y de los números fraccionarios, pueden reducirse á una: *multiplicar el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el producto será el numerador del cuociente; y multiplicar el numerador del divisor por el denominador del dividendo, y el producto será el denominador del cuociente.*

En el caso de dividir un quebrado por un entero, ó vice-versa, se considerará el entero como un quebrado que tiene por denominador la unidad. Los números fraccionarios de dos términos se reducirán á uno solo. Ejemplos:

1.° $\frac{2}{6}:\frac{1}{6}=\frac{2\times6}{1\times6}=\frac{12}{6}=2.$ Multiplico el numerador 2 del dividendo por el denominador 6 del divisor, y tengo 12 para numerador del cuociente. Multiplico en seguida 1, numerador del divisor por 6, denominador del dividendo, y tengo 6 para denominador del cuociente.

2.° $8:\frac{2}{3}=\frac{8}{1}:\frac{2}{3}=\frac{8\times3}{1\times6}=\frac{24}{2}=12.$ Convierto el entero 8, dividendo en la fraccion $\frac{8}{1}$, y ejecutando la operacion como en el caso anterior, me da por resultado $\frac{24}{2}$ ó 12.

3.° $\frac{2}{3}:8=\frac{2}{3}:\frac{8}{1}=\frac{2\times1}{8\times3}=\frac{2}{24}.$ Convierto el entero divisor 8 en la fraccion $\frac{8}{1}$, y ejecutando el cálculo como en los casos anteriores, obtengo por resultado. $\frac{2}{24}$

4.° $4\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}=\frac{9}{2}:\frac{9}{4}=\frac{9\times4}{9\times2}=\frac{36}{18}=2.$ Convirtiendo los números fraccionarios de dos términos en un solo término, y practicando la operacion exactamente lo mismo que las anteriores, tendremos el resultado $\frac{36}{18}=2.$

TERCERA SECCION.—DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

§. I. *De las fracciones decimales en general.*

1. Llámase *fracciones decimales*, *números decimales*, ó simplemente *decimales*, á las fracciones compuestas de

partes que van siendo de diez en diez veces menores que la unidad.

Se emplea mas particularmente el término de *números decimales* en aquellas fracciones decimales que están precedidas de una ó varias unidades enteras.

2. La sucesion de las fracciones decimales siguen el mismo principio de nuestra numeracion, en la cual toda cifra colocada á la derecha de otra vale diez veces menos que esta. Así las fracciones decimales se forman considerando la unidad como dividida en diez partes iguales, de las cuales cada una es una *décima* de la unidad; la *décima*, como dividida en diez partes iguales, de las que cada una es una *centésima*; la centésima, como dividida en diez partes iguales, de las que cada una es una *milésima*, y así de las demás; de cuyo modo se obtienen *diezmilésimas*, *cienmillonésimas*, etc., de una unidad cualquiera.

3. Una *décima*, siendo diez veces menor que la unidad, es natural escribir las décimas á la derecha de las unidades simples, así como se escriben las unidades á la derecha de las decenas. Pero para no confundir la parte entera con la parte decimal, se las separa con una coma, colocada entre las unidades y las décimas. Así el número 7 unidades, 9 décimas, se escribe 7,9, porque 9 representa partes diez veces mas pequeñas que las unidades.

4. La *décima* de 100 es 10, y la *centésima* de 100 es 1. Por consiguiente, la *décima* equivale á 10 *centésimas*, ó bien la *centésima* es diez veces menor que la *décima*.

La *centésima* de 1000 es 10, y la *milésima* de 1000 es 1. Por consiguiente, la *milésima* es diez veces menor que la *centésima*.

Del mismo modo una *milésima* equivale á 10 *diezmilésimas;* una *diezmilésima* á 10 *cienmilésimas*; una *cienmilésima* á 10 *millonésimas*.

5. Cada parte decimal, siendo diez veces mayor que la que le sigue á la derecha, y diez veces menor que la que la precede á la izquierda, resulta que una parte decimal cualquiera es décima relativamente á la que la sigue, y centésima relativamente á la que la precede.

6. Las *décimas* ocupan el *primer lugar* despues de la coma; las *centésimas* deben ocupar el *segundo*; las *milésimas* el *tercero;* las *diezmilésimas* el *cuarto*; las *cienmilésimas* el *quinto*; las *millonésimas* el *sesto*, y así de las demás.

7. Los órdenes ó las clases de decimales que faltan, se reemplazan por ceros en los números decimales, del mismo modo que se hace en los números enteros.

8. 1.° Para leer un número decimal escrito, se enuncia desde luego la parte entera como si estuviese sola; en seguida la parte decimal como si se tratase tambien de un número entero, y se termina este último enunciado con el nombre de las unidades de la última cifra de la derecha. Así:

El número decimal 7,395 se enuncia, *siete unidades, trescientas noventa y cinco milésimas*.

En efecto, 3 décimas = 30 centésimas; 30 centésimas + 9 centésimas = 39 centésimas = 390 milésimas: 390 milésimas + 5 milésimas = 395 milésimas.

Se puede tambien enunciar todo el número decimal como un número entero, teniendo cuidado de terminar la enunciacion con el nombre de los decimales de la menor especie. Así:

El número 7,395 puede enunciarse, *siete mil trescientas noventa y cinco milésimas.*

En efecto, siete unidades valen 7000 milésimas, que unidas á 395 milésimas, hacen 7395 milésimas.

2.° Una fraccion decimal aislada se lee como un número decimal. Solamente se expresa al fin de la enunciacion á qué especie de unidades pertenece la fraccion si estuviese indicada; en el caso contrario nada se añade. Sea pues:

El número de años, 0 años, 03. Se dice sencillamente 3 *centésimas de año*, y no 0 años, 3 centésimas.

Y el número 0,00025. Ya que no hay unidades designadas, ni milésimas, se dice: 25 cienmilésimas, ó 250 millonésimas.

9. 1.° Para escribir un número decimal enunciado se pone sucesivamente comenzando desde la izquierda el número de unidades de cada especie, ocupando con ceros el lugar de las unidades intermedias que puedan faltar, y se coloca en seguida la coma á la derecha de la cifra de las unidades simples, de manera que cada guarismo ocupe el lugar que conviene á la especie de sus unidades. Así:

Cada uno de los números, *siete unidades. trescientas* *noventa y cinco milésimas, ó siete mil trescientas noventa y cinco milésimas*, se escribe 7,395.

Cada uno de los números, *cinco unidades, cuatro cienmilésimas, ó quinientas mil cuatro cienmilésimas*, se escriben 5,00004.

2.º Una fraccion decimal aislada se escribe como un número decimal; solamente se coloca un cero en el lugar de las unidades enteras, tanto para denotar que faltan, como para indicar la especie de la unidad. Así:

El número *doscientas seis milésimas* se escribe, 0,206; el número *cinco centésimas de legua* se escribe, 0 leguas, 05.

10. El cambio de lugar de la coma cambia tambien el valor del número decimal. Si se corre la coma 1, 2, 3 lugares hácia la derecha, el número se hace 10, 100, 1000 veces mayor; por el contrario, corriendo la coma 1, 2, 3 lugares hácia la izquierda, se hace el número 10, 100, 1000 veces menor. Así:

En el número 21,835, si se coloca la coma despues del 3, tendremos 2183,5, donde las unidades se han hecho centenas, las décimas decenas, las centésimas unidades, y las milésimas décimas: el número total se ha hecho pues cien veces mayor; lo contrario sucederia si se hubiese colocado la coma antes del número 2, de esta suerte, 0,21835.

11. El valor de un número decimal ó de una fraccion decimal, no varía aunque se añadan ó supriman ceros á su derecha. Así:

2, 8 equivale á 2,80; á 2,800 á 2,8000 y recíprocamente 2,8000 equivale á 2,800; á 2,80 y á 2,8. En el primer caso las partes decimales se han hecho 10, 100, 1000 veces mas pequeñas; pero al mismo tiempo se hicieron 10, 100, 1000 veces mas numerosas: en el segundo caso se han hecho 10, 100, 1000 veces mayores, pero al propio tiempo 10, 100, 1000 veces menos numerosas: por consiguiente hay compensacion, y el valor del número no se ha alterado.

12. Para reducir las fracciones decimales á una misma especie, basta, segun lo que precede, con añadir á cada una de ellas tantos ceros como se necesiten para que todos tengan el mismo número de decimales.

Sea por ejemplo 2,8; 3,45; 4,233 y 5,4679 que se ha de reducir á una misma especie.

El último número tiene cuatro decimales: se pueden añadir tres ceros al primero, dos al segundo y uno al tercero sin alterar su valor, y se obtendrán así los números 2,8000, 3,4500, 4,2330; 5,4679, que todos tienen cuatro decimales, y que por consiguiente representan todos *diezmilésimas.*

Sea 5,4000; 4,200; 3,40 y 2,8 para reducir á una misma especie.

El último número no tiene mas que un decimal: puedo pues suprimir tres ceros al primero, dos al segundo y uno al tercero, y tengo así los números 5,4; 4,2; 3,4 y 2,8, que no tienen cada uno mas que un decimal, y que por consiguiente representan *décimas.*

§. II. *Adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los números y de las fracciones decimales.*

1. 1.º La adicion de los números decimales y de las fracciones decimales se hace como la de los números enteros, separando en la suma con una coma tantos decimales como hay en el sumando que tenga mas.

Sean para sumar los números 12,34+42,5+289,0009+962+50,365+0,042:

```
      12,34
      42,5
     289,0009
     962,
      50,365
       0,042
   ___________
    1356,2479 (suma).
     211,1000 (prueba).
```

Coloco convenientemente los números propuestos, sumo como en los números enteros y obtengo por resultado 13562479. De los números dados para sumar, el que mas decimales contiene es cuatro: de consiguiente, separo cuatro en la suma, que es 1356,2479.

2.º La prueba de una adicion decimal se hace ordinariamente por la sustraccion. Súmanse las cifras de la primer columna de la izquierda, réstase el total obtenido de la parte correspondiente de la suma, y se escribe la resta debajo para unirla como decenas á la cifra siguiente de la suma. Del número que resulta se quita el total de la segunda columna, y se continúa del mismo modo hasta la última columna de la derecha. La última resta debe ser cero cuando la suma ha sido bien hecha, porque si de una suma se quitan sucesivamente todas las partes de que se compone, es claro que nada debe quedar.

2. 1.º La sustraccion de los números decimales y de las fracciones decimales, se hace como la de los números enteros, solamente que para facilitar la aplicacion de la regla se les reduce á la misma especie, y hecha la sustraccion, se coloca en la diferencia una coma, en la columna en que se hallan las comas de los números propuestos.

Sea 44,6294 que se ha de restar de 47,5:

47,5000
44,6294
———
2,8706 (*diferencia*).
47,5000 (*prueba*).

Reduzco los dos números á la misma especie, añadiendo tres ceros á la derecha de 47,5; resto 44,6294 de 47,5000, como si fueran enteros, y separo cuatro decimales con una coma en la diferencia que es de 2,8706.

2. La prueba de una sustraccion decimal se hace como en los números enteros, por la adicion de la diferencia con el menor número de los dos propuestos.

3. La multiplicacion de los números decimales y de las fracciones decimales, se hace como la de los números enteros: 1.º Se forma el producto sin hacer caso de la coma en los dos factores; pero se separan en seguida hácia la derecha de este producto tantos decimales como hay en ambos factores reunidos. 2.º Si el producto no contiene tantas cifras como debiera haber decimales, se añaden á la izquierda tantos ceros como sea necesario para completarlos.

1.º Sea 4,6294 que se ha de multiplicar por 7,5:

46294
75
———
231470
324058
———
34,72050

Suprimiendo la coma en ambos factores, quedan hechos respectivamente el uno diez mil veces, y el otro diez veces mayor; el producto es por consiguiente cien mil veces mayor. Para volverle á su justo valor, le dividiré por cien mil, lo que hago separando hácia su derecha cinco decimales.

2.º Sea 0,04 que se ha de multiplicar por 0,0012:

004
00012
———
48 (1.er *producto*).
0,000048 (2.º *producto*).

Formo el producto de 4 por 12, y tengo 48; pero el multiplicando encierra dos cifras decimales y el multiplicador cuatro, el producto debe por consecuencia contener 6; y como solo se compone de dos cifras, coloco á su izquierda 5 ceros, y separo entonces los 6 decimales: el resultado 0,000048 expresa el producto pedido.

La prueba de una multiplicacion decimal se hace como en los números enteros; ó por la division, ó por el número 9.

4. La division de los números decimales y de las fracciones decimales presentan tres casos:

1.º Si el dividendo es decimal y el divisor entero, se hace la division sin hacer caso de la coma, y terminada la operacion, se separan hácia la derecha en el cuociente tantos decimales como hay en el dividendo.

Sea 766,25 que se ha de dividir por 25:

76625	25
	3065
0162	30,65
125	30,65

Divido 76625 por 25. El cuociente 3065 es cien veces mayor, puesto que ha resultado de un dividendo cien veces mayor que el propuesto; para hacer pues este cuociente cien veces menor, es decir, para volverle á su justo valor, le doy tantos decimales como tenia el dividendo primitivo, y tengo por cuociente exacto 30,65.

2.º Si el dividendo y el divisor tienen el mismo número de decimales, se hace abstraccion de la coma en ambos números, luego se divide el uno por el otro, y el cuociente obtenido será el cuociente exacto, puesto que los dos términos no han sufrido alteracion el uno respecto al otro. En este caso el cuociente no tiene decimales.

Sea 4,86 que se ha de dividir por 2,43:

486	243
0	2

El número 486 dividido por 243 da por cuociente exacto 2; porque si bien el dividendo se hizo cien veces mayor, el divisor se hizo tambien; por consiguiente hay compensacion.

$$4,86 = \frac{486}{100}$$

Se obtiene el mismo resultado observando que los números 4,86 y 2,43 siendo equivalentes á las fracciones del mismo

$2{,}43=\frac{243}{100}$ nombre $\frac{486}{100}$ y $\frac{243}{100}$, el cuociente de 4,86 por 2,43 por manera es $\frac{486}{243}$; que se obtendrá este cuociente dividiendo 486 por 243.

3.° Si el número de decimales no es igual en ambos términos, se escribe á la derecha del que tiene menos, tantos ceros como le falten para igualar al que tiene mas. La division se hace en seguida como si se tratase de números enteros, y el cuociente en este caso tampoco contiene decimales.

Sea 486 que se ha de dividir por 0,00243:

486000	000243
	2000

Reduzco estos dos números á la misma especie añadiendo tres ceros á la derecha del primero, y tengo 486000 que he de dividir por 000243, es decir, 486000 por 243, lo que me da 2,000 por cuociente pedido.

5. Cuando una division no tiene cuociente exacto, si se quiere aproximar al verdadero, se escribe cero á la derecha de la resta y se divide de nuevo, luego se escribirá cero á la derecha de la resta siguiente y se volverá á dividir, siguiendo así hasta llegar á la cifra del órden decimal á que se quiera aproximar el cuociente.

Sea 307,80 que se ha de dividir por 0,119 hasta aproximar diez milésimas, es decir, que la diferencia entre el cuociente aproximado y el verdadero sea menor que una diezmilésima.

307800	119
698	2586,5547
1030	
780	
660	
650	
550	
840	
7	

Reduzco los dos términos á la misma especie, añadiendo un cero á la derecha del dividendo, y dividiendo 307800 por 119, hallo 2586 para la parte entera del cuociente y 66 por resta. Escribo un cero á la derecha de esta resta y tengo 660 décimas, que divididas por 119 dan por cuociente 5 décimas y 65 de resta. Hago lo mismo en esta y demás restas sucesivas, hasta obtener 4 decimales, y por consiguiente diez milésimas en el cuociente. El cuociente de 307,80

por 0,119 aproximado hasta diez milésimas, es pues, 2586,5547.

6. La prueba de una division decimal se hace como para los números enteros, ó por la multiplicacion, ó por el número 9.

§. III. *Conversion de las fracciones comunes en fracciones decimales y de las fracciones decimales en fracciones comunes.*

1. No puede siempre convertirse exactamente cualquier fraccion comun en fraccion decimal; pero puede sí formarse una fraccion decimal que solo difiera en una decimal determinada.

La operacion consiste en dividir el numerador por el denominador, como si el primero de estos términos fuera una resta de division, es decir, despues de haber escrito un cero á su derecha. Se convierten en seguida las restas sucesivas en centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc.; pero es preciso antes de nada poner en el cuociente un 0 seguido de una coma, puesto que no debe haber en él unidades simples enteras.

Sean $\frac{3}{5}$ que se han de convertir en fraccion decimal.

30	5
	0,6

Pongo un 0 y una coma en el cuociente, coloco otro 0 á la derecha del numerador que tomo por dividendo, divido 30 por 5, y obtengo 6 por cuociente completo. La fraccion $\frac{3}{5}$ es pues igual á 0,6.

Sean $\frac{3}{11}$ que se han de convertir en fraccion decimal.

30	11
80	0,27272
30	
80	
30	
8	

Hallo que llevando el cuociente hasta cien milésimas $\frac{3}{11}$ es igual á 0,27272 aproximado hasta menos de una cienmilésima, puesto que solo quedan 8 de resta.

2. Se conoce que una fraccion comun puede convertirse exactamente en decimal, cuando su denominador no tiene mas factores que 2 y 5; en el caso contrario es imposible una exacta conversion, y la division del numerador y las restas se prolonga hasta lo infinito como en el ejemplo precedente, y la fraccion se llama *continua*.

Sea $\frac{18}{25}$ que se han de convertir en fraccion decimal.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 25 \\ \hline 50 & 0,72 \end{array}$$

El denominador tiene 5 por factor: puede, pues, obtenerse una conversion exacta; y en efecto, se halla que $\frac{18}{25}$ es igual á 0,72.

3. Toda fraccion decimal puede convertirse exactamente en fraccion comun: basta para esto escribir por numerador el número formado por los decimales, y por denominador la unidad, seguida de tantos ceros como cifras decimales hay. Así:

$$0,5=\frac{5}{10}$$
$$0,25=\frac{25}{100}$$
$$0,125=\frac{125}{1000}$$
$$0,3125=\frac{3125}{10000}$$
$$0,15625=\frac{15625}{100000}$$

En efecto, estas fracciones se enuncian dos á dos de la misma manera: 5 décimas, 25 centésimas, 125 milésimas, 3125 diezmilésimas, 15625 cienmilésimas.

Por otra parte $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$, etc. significan 5 dividido por 10, 25 dividido por 100, divisiones cuyos cuocientes son 0,5; 0,25, etc.

SECCION CUARTA.—DE LAS POTENCIAS Y DE LAS RAICES DE LOS NÚMEROS.

§. 1. *Definiciones y observaciones.*

1. Llámase *potencia* de un número al producto de varios factores iguales á este número. Así 3, 9, 27, 81, 243,

son la primera, segunda, tercera, cuarta y quinta potencia de 3, ó sea la potencia de primero, segundo, tercer *grado*, etc., de 3.

2. Llámase *raiz* el número que, multiplicado varias veces por sí mismo, reproduce una cantidad dada. Así 3 es la segunda raiz de 9, la tercera de 27, la cuarta de 81 y la quinta de 243, ó la raiz de segundo *grado* de 9, de tercer grado de 27, etc.

3. Por lo general se llama *cuadrado* la segunda potencia, y *cubo* la tercera; y *raiz cuadrada* y *raiz cúbica* la raiz segunda y tercera de una cantidad.

4. La elevacion á potencias no ofrece otra dificultad que la que puede resultar de practicar operaciones largas. Por lo demás, está reducida á practicar multiplicaciones de números enteros, fraccionarios ó decimales.

5. Siendo todas las potencias de 1=1, el medio mas sencillo de hallar las demás potencias de los diez primeros números es tener presente la tabla siguiente:

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117659
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000

6. Las potencias de las cantidades se indican colocando á la derecha y un poco mas arriba de la cantidad, encerrada entre paréntesis, si fuere necesario, una cifra pequeña que manifieste el *grado* de la potencia, ó sea el número

de factores iguales que constituyen esta potencia. Así, pues, las expresiones

$$307^{2},\quad \left(\frac{21}{34}\right)^{3}_{\,\text{"}}\quad \left(1+\frac{2}{3}\right)^{6}$$

indican respectivamente el cuadrado de 307, el cubo de $\frac{21}{34}$ y la sesta potencia de $1+\frac{2}{3}$ ó de $\frac{5}{3}$.

Las raices se indican con el signo *radical* $\sqrt{}$, en cuya abertura se coloca el grado ó *índice* de la raiz que se ha de extraer, suprimiendo por lo regular el 2 que indica la raiz cuadrada. Las expresiones

$$\sqrt{17},\quad \sqrt[3]{\frac{101}{103}},\quad \sqrt[8]{24+\frac{7}{11}}$$

representan, pues, respectivamente la raiz cuadrada de 17, la raiz cúbica de $\frac{101}{103}$, y la raiz octava de $24+\frac{7}{11}$ ó de $\frac{271}{11}$.

§. II. *De la raiz cuadrada y de su extraccion.*

1. Para extraer la raiz cuadrada de los números de una sola cifra, se formará el cuadrado de los nueve primeros números, que siempre es menor que 100, y se verá entre qué números está colocado el dado, consiguiendo así averiguar la raiz exacta ó aproximada que le forma.

2. El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades contiene tres partes, á saber: el *cuadrado de las decenas*, el *duplo de las decenas multiplicado por las unidades* y *el cuadrado de las unidades*. En efecto, formemos el cuadrado de 64 y lo veremos comprobado.

64		
64		
16	Unidades, *cuadrado de 4 unidades.*	
24	Decenas, *producto de las 6 decenas por las 4 unidades.*	Duplo de las decenas por las unidades.
24	Decenas, *producto de las 6 decenas por las 4 unidades.*	
36	Centenas, *cuadrado de las 6 decenas.*	
4096	Unidades. *cuadrado de 64.*	

3. La extraccion de la raiz cuadrada está fundada en el principio que acabamos de sentar, y consiste en ir descomponiendo el cuadrado en sus partes y obteniendo de cada una de ellas su raiz. Veamos cómo se ejecuta esta operacion en la práctica.

Para extraer la raiz cuadrada de un número entero, por ejemplo 21372129, se le divide en porciones de dos cifras de derecha á izquierda, pudiendo contener una sola cifra la última porcion de este lado, y se dispone el cálculo del modo siguiente:

Cuadrado dado.			*4623 raiz hallada.*	
21.37	21.	29.		
53.7				
21	2.1		86×6=516	*Operaciones de tanteo.*
	277	2.9	922×2=1844	
		00	9243×3=27729	

La primera cifra 4 de la raiz se obtiene inmediatamente, puesto que es la raiz del mayor cuadrado 16 contenido en 21. La resta 5 se coloca debajo, y á su lado las dos cifras siguientes del cuadrado. Se separa el 7 con un punto, se divide el 53 por 8, duplo de la primera cifra hallada á la raiz; el cuociente 6 indicará la segunda cifra de esta ú otra cifra mayor. Para averiguar si esta cifra es ó no la propia buscada, se coloca al lado de 8 debajo de la raiz y se multiplica 86 por 6; y como el producto 516 puede restarse del 537, queda averiguado es la segunda cifra verdadera de la raiz. Se baja en seguida 21, tercera porcion del cuadrado, al lado de la diferencia 21, hallada entre 537 y 516, se separa con un punto la cifra 1, y se divide 212 por 92, duplo de 46, parte hallada ya á la raiz. El cuociente 2 será la tercera cifra buscada ú otra cifra mayor. Para averiguarlo se coloca al lado de 92 y se multiplica 922 por 2; lo que da 1844, número menor que 2121. Al lado de 277, diferencia entre estos dos últimos números, se baja la porcion 29 del cuadrado, se separa el 9 con un puntito, y se divide 2772 por 924, duplo de 462, número hallado ya á la raiz; y colocando el cuociente 3 al lado de 924, se halla que el producto 9243 por 3 da 27729, que no deja resta, siendo por consiguiente 4623 la raiz cuadrada exacta de 21372129.

En el caso en que algunos de los productos parciales 86×6, 922×2, 9243×3 hubiera sido mayor que el número de que debia restarse, se hubiera disminuido sucesivamente de una unidad la cifra tanteada 6, 2 ó 2, hasta que la sustraccion hubiese sido posible.

Si en lugar del número 21372129 se nos hubiese propuesto 21372243, nos hubiera quedado de resta 114, y el número 4623 no hubiera expresado sino aproximadamente la raiz del cuadrado propuesto, porque este no seria un cuadrado perfecto.

4. Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado comun, se convierte su denominador en un cuadrado perfecto, si no lo fuere ya, para lo cual se multiplican sus dos términos por el producto de los factores que falten al denominador para ser cuadrado, y de hecho se extrae la raiz cuadrada aproximada del nuevo numerador, que se divide por la raiz del nuevo denominador. Así:

$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$ (resultado exacto) $\sqrt{\frac{11}{25}}=\frac{\sqrt{11}}{5}=\frac{3}{5}$ (Aproximada hasta menos $\frac{1}{5}$ de unidad.)

$\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{7}{3.4}}=\sqrt{\frac{7\times3}{3^2\times2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (Aproximada hasta menos $\frac{1}{6}$ de unidad.)

$\sqrt{\frac{8}{11}}=\sqrt{\frac{8\times11}{11^2}}=\frac{\sqrt{88}}{11}=\frac{9}{11}$ (Aproximada hasta menos $\frac{1}{11}$ de unidad.)

5. Para extraer la raiz cuadrada de un número decimal, se añaden á la derecha de este número tantos ceros como

sean necesarios para que las cifras decimales sean en número par, dobles del número decimal que se quiere obtener en la raiz; y haciendo abstraccion de la coma se extrae la raiz del número así obtenido, separando hácia la derecha de esta raiz la mitad de las cifras decimales del cuadrado.

Así hallaremos que 5,87 es la raiz cuadrada de 34,5 ó de 34,5000 aproximada hasta menos de 0,01.

6. Cuando un número entero ó fraccionario irreductible no es un cuadrado perfecto, es imposible hallar exactamente su raiz.

Para aproximar la raiz de esta clase de números se convierte en quebrado de una especie determinada, y mucho mejor en decimal, y se efectúa la operacion segun queda dicho.

Por ejemplo, para obtener $\sqrt{7}$ aproximada hasta menos de $\frac{1}{5}$ se pondrá:

$$\sqrt{7}=\sqrt{\frac{7\times5^2}{5^2}}=\frac{\sqrt{175}}{5}=\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}.$$

La raiz de 2 aproximada hasta menos de 0,001 se obtiene extrayendo la raiz de 2000000 y separando tres cifras decimales hácia la derecha de esta raiz, lo que da

$$\sqrt{2}=1,414$$

Las raices de los números enteros ó fraccionarios irreductibles, que no son perfectos cuadrados, se llaman *irracionales de segundo grado*, ó *incomensurables*, porque no pueden expresarse exactamente por un número limitado de cifras.

§. III. *De la raiz cúbica y de su extraccion.*

1. Para extraer la raiz cúbica de los números de una

sola cifra, se elevan al cubo los nueve primeros números, que siempre dan un número menor que 1,000, y se ve entre qué números está colocado el dado, con lo cual se averiguará la raiz exacta ó aproximada que le forma.

2. Cuando el cubo de un número entero consta de tres cifras, su raiz no tiene mas que una; cuando consta de 4, 5 ó 6, la raiz cúbica constará de dos, y así de los demás. En efecto, siendo los cubos de los números 1, 10, 100, etc., los números comprendidos entre 1 y 1000, entre 1000 y 1000000, tendrán sus raices cúbicas entre 1 y 10, 10 y 100, etc.

3. El cubo de un número compuesto de decenas y unidades consta de cuatro partes, á saber: el *cubo de las decenas*, el *producto de tres veces el cuadrado de las decenas por las unidades, tres veces el cuadrado de las unidades por las decenas*, y *el cubo de las unidades*.

4. La extraccion de la raiz cúbica está fundada en el principio que acabamos de sentar, y consiste en ir descomponiendo el cubo en sus partes y obteniendo la raiz cúbica de cada una de ellas. Veamos cómo se efectúa esto en la práctica.

Para extraer la raiz cúbica de un número, tal por ejemplo 401947272, se divide en porciones de tres cifras de derecha á izquierda, pudiendo la última porcion de este lado contener dos cifras y hasta una sola, y se dispone el cálculo de la manera siguiente:

401.947.272	738
589.47	14700 = $70^2 \times 3$ (1.^{er} *divisor*).
129.302.72	639 = $(70 \times 3 + 3) \times 3$
00	15339 × 3 = 46017
	15.98700 = $730^2 \times 3$ (2.^{o} *divisor*).
	17584 = $(730 \times 3 + 8) \times 8$
	16.16284 × 8 = 12930272

Siendo 343 el mayor cubo contenido en la última porcion de la izquierda, 401, 7 es la primera cifra de la raiz. La diferencia entre 343 y 401 es 58, número á cuyo lado se baja la segunda porcion 947. Dejando las dos últimas cifras de la derecha de ella, se busca cuántas veces 589 contiene el triplo cuadrado de 7 ó 147. El cuociente 3 será la segunda cifra de la raiz, ó una mayor. Para averiguarlo es necesario añadir á las 147 centenas que resultan del triplo de 70 las 639 que se obtienen multiplicando el triplo de 70 aumentado de 3 ó 213 por 3. La suma 15339 multiplicada por 3 da por producto 46017, que puede sustraerse de 58947, lo que prueba que la cifra 3 de la raiz es la verdadera. Al lado de la diferencia 12930 se baja la porcion siguiente 272, cuyas dos últimas cifras se separan, y se divide del mismo modo 129302 por el triplo cuadrado de 73 ó por 15987. El cuociente 8 es la tercera cifra de la raiz, ó una mayor. Para averiguarlo se añadirá al número 1598700, triplo cuadrado de 730, 17584, que es igual al producto del triplo de 730 aumentado de 8 multiplicado por 8. La suma 1616284 multiplicada por 8, que da por producto 12930217, será precisamente igual á la segunda resta; por manera que la resta final es 0, y que 738 es la raiz cúbica exacta del cubo exacto 401947272.

Si alguna de las sustracciones parciales no hubiesen sido posibles, se hubiera disminuido sucesivamente en una unidad las cifras halladas 3 ú 8, hasta tanto que la suma del triplo producto del cuadrado de la parte ya hallada á la raiz, diese un número tal que hiciese posible la sustraccion indicada.

Si en lugar del número propuesto 401947272 se nos hubiese dado 401959397, la tercera resta hubiera sido de 12125, y 738 hubiera expresado únicamente la raiz cúbica aproximada en menos de una unidad, porque el número propuesto no es cubo perfecto.

5. La raiz cúbica de un número quebrado se obtiene extrayendo separadamente la raiz cúbica de cada uno de sus dos términos. Si el denominador no es cubo perfecto, se convierte en tal multiplicando los dos términos del quebrado por un factor conveniente. Así:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \qquad \sqrt[3]{\frac{3}{20}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2 \times 5^2}{2^2 \times 5 \times 2 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[3]{150}}{2 \times 5} = \frac{1}{2}$$

aproximada hasta menos $\frac{1}{10}$ de unidad.

$$\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt[3]{4 \times 7^2}}{7} = \frac{\sqrt[3]{196}}{7} = \frac{5}{7}$$ á menos de $\frac{1}{7}$ de unidad próximamente.

6. Las raices cúbicas de los números enteros y de las fracciones irreductibles, que no son cubos perfectos, no pueden expresarse exactamente por un número limitado de cifras.—A estas raices se llaman *irracionales de tercer grado*.

Puede aproximarse tanto como se quiera el verdadero valor de una raiz cúbica irracional. En efecto, si se quiere hacer la valuacion bajo la forma de quebrado comun de un denominador dado, basta multiplicar el número de que se quiere obtener la raiz por el cubo de este denominador, extraer aproximadamente á menos de una unidad la raiz cúbica del producto obtenido, y dividir esta raiz por el denominador dado.

De que se sigue que para aproximar por decimales una raiz cúbica, debe añadirse á la derecha del número de que se quiere extraer la raiz, ceros suficientes para que el número de las cifras decimales sea el triplo del de las cifras que se quieran obtener en la raiz.

Ejemplos: Para tener $\sqrt[3]{5}$ aproximada hasta menos 0,01 de unidad, se extrae la raiz cúbica de 5000000000, y hácia la derecha del número obtenido 1709 se separan tres cifras decimales, lo que da 1,709. El número mas aproximado es 1710, porque siendo 5000211000 cubo de 1,710, difiere menos de 5000000000 que el cubo de 1,709, que es 4991443829.

SEGUNDA PARTE.

PRIMERA SECCION.—DIFERENTES MEDIDAS.

§. I. *De las medidas en general.*

1. *Medir* es buscar cuántas veces una cantidad contiene á otra de la misma especie, que se toma por *unidad de medida*.

Así, la *unidad de medida* es una cantidad conocida, tomada por término de comparacion entre cantidades de una misma especie, cuyas magnitudes se quieren expresar en números.

Las medidas se aplican á seis cosas, á saber: á la *longitud*, á la *superficie*, al *volúmen* ó *solidez* y *la capacidad*, al *peso*, á las *monedas* y al *tiempo* ó *duracion*.

2. Las medidas, pues, segun los usos á que se las destina, se dividen en seis clases:

1.ª Medidas *lineales*, destinadas á medir intervalos ó distancias.

2.ª Medidas *superficiales*, destinadas á medir superficies ó áreas.

3.ª Medidas de *volúmenes* ó *capacidades*, destinadas á medir los cuerpos en su estado *sólido* y *líquido*.

4.ª Medidas *de peso*, destinadas á medir el peso.

5.ª Medidas *de monedas*, destinadas á medir el dinero.

6.ª Medidas *de tiempo*, destinadas á medir la duracion de las cosas.

3. Llámanse vulgarmente *medidas* á las tres primeras

clases, esto es, á las lineales, superficiales y de volúmen ó capacidad.

Las destinadas á medir el peso de los cuerpos reciben generalmente el nombre de *pesas*.

Y las destinadas á medir el dinero, se llaman *monedas*.

§. 1. *Medidas españolas.*

1. De las medidas usadas en España, llamábanse *pesas* y *medidas españolas* las mandadas usar en todo el reino por la real órden de 26 de enero de 1801. Hoy deben recibir este nombre las del *sistema métrico* mandado usar por la ley de 19 de julio de 1849.

2. Las *normas* ó *padrones* de las *pesas* y *medidas* llamadas *españolas* eran:

1.° La *vara* de Burgos, conservada en el archivo de la ciudad de Burgos.

2.° La *media fanega*, conservada en el archivo de la de Avila.

3.° Las *medidas de líquidos*, conservadas en el de la de Toledo.

4.° El *marco* de pesas, que existe en el archivo del Consejo.

3. Para medir una *longitud* se compara con otra longitud, tomada por unidad. Las medidas españolas lineales ó de longitud eran y sirven aun de tales el *pié*, la *vara*, el *estadal lineal* y la *legua*.

1.° El *pié* era la raiz de todas las medidas de longitud ó de intervalo.

El *pié* valia y vale aun. .	16 dedos.
El *dedo*.	2 medios dedos, 4 cuartas, 8 octavas y 16 avas partes.

Se hacia y hace tambien del *pié* la subdivision siguiente:

El *pié* vale. . . .	12 pulgadas.
La *pulgada*. . . .	12 líneas; la línea, 12 puntos.

2.° La *vara* servia y servirá hasta 1860 para medir el paño, las telas, etc.

La *vara* vale.	3 piés.
La *vara* vale.	2 medias varas, 4 cuartas y 8 ochavas ó medias cuartas.
La *vara* vale tambien.. .	3 tercias, 6 medias tercias ó sexmas y 12 medias sexmas ó dozavas partes.

3.° El *estadal lineal* estaba generalmente destinado á medir las tierras ó longitudes mas considerables que las anteriores.

El *estadal lineal* vale. . 4 varas ó 12 piés.

4.° La *legua* servia para medir las distancias itinerarias.

La *legua española* vale. 20,000 piés.

4. Para medir una superficie se busca cuántas unidades cuadradas contiene.

Las medidas de superficie eran y son: el *estadal cuadrado*, la *aranzada* y la *fanega*.

1.° Un *estadal cuadrado* era una superficie de un *estadal lineal* de largo y otro de ancho.

Pero un estadal lineal=12 piés: luego 1 estadal cuadrado=12×12=144 piés cuadrados.

Luego 1 pié cuadrado=12×12 ó 144 pulgadas cuadradas.

Y 1 pulgada cuadrada=12×12 ó 144 líneas cuadradas.

2.° La *aranzada* era una medida destinada á medir los terrenos.

Una *aranzada de tierra* es una superficie que tiene una aranzada de largo y otra de ancho.

La *aranzada* vale 20 estadales: luego una aranzada cuadrada valdrá 20×20 ó 400 estadales cuadrados, ó 57,600 piés cuadrados.

3.° La *fanega* era una superficie de una fanega de ancho y otra de largo.

La *fanega* equivale á 24 estadales: luego la fanega cuadrada valdrá 24×24 ó 576 estadales cuadrados, que hacen 82,944 piés cuadrados.

La *fanega* vale tambien.	12 celemines.
El *celemin*.	4 cuartillos.

5. Para *medir un sólido* se buscan cuántas unidades cúbicas contiene.

Las medidas de volúmen eran el *pié cúbico*, el *cahiz*, la *fanega*, la *cántara*, el *moyo* y la *arroba*.

1.° El *pié cúbico* es un sólido que tiene un pié de largo, otro de ancho y otro de grueso.

Pero un pié=12 pulgadas.

Luego 1 pié cúbico=12×12×12 ó 1728 pulgadas cúbicas.

Y 1 pulgada cúbica=12×12×12 ó 1728 líneas cúbicas.

2.° Para medir todo género de granos, la sal y demás cosas secas, se usaba y usa todavía el *cahiz* y la *fanega*.

El *cahiz* vale.. .	12 fanegas.
La *fanega*.. . . .	12 celemines, 2 medias fanegas y 4 cuartillas.
El *celemin*. . . .	2 medios celemines, 4 cuartillos, 8 medios cuartillos, 16 ochavas, 32 medias ochavas y 64 ochavillas.

3.° Para medir todo género de líquidos, á excepcion del aceite, se empleaba y empleará aun la *cántara* y sus divisiones: tambien se usaba el *moyo*.

La *cántara* vale. .	2 medias cántaras, 4 cuartillas, 8 azumbres, 16 medias azumbres, 32 cuartillos, 64 medios cuartillos y 138 copas.
El *moyo*..	16 cántaras.

4.° Las medidas para el aceite estaban arregladas al peso, y eran y son la *arroba* y sus divisiones.

La *arroba* vale. .	2 medias, 4 cuartas, 8 medias cuartas, 25 libras, 100 cuarterones ó panillas y 200 medias panillas.

La arroba contiene.	1003,53	pulgadas cúbicas.
La media arroba.	501,765	id.
El cuarto de arroba.	250,8825	id.
El medio cuarto de arroba.. . .	125,44125	id.
La libra..	40,1412	id.
El cuarteron ó panilla..	10,0353	id.
La media panilla.	5,01765	id.

9. Para *medir un peso* se compara con otro peso, que sirve de unidad.

Las medidas de peso ó pesas eran y son: la *libra*, la *arroba* y el *quintal*.

1.°	La *libra* vale.	16 onzas, 2 medias libras, 4 cuarterones, y 8 medios cuarterones.
	La *onza*. . .	16 adarmes, 2 medias onzas, 4 cuartas y 8 *ochavas* ó *dracmas*.
	El *adarme*. .	3 tomines.
	El *tomin*. . .	12 granos.
2.°	La *arroba* vale	25 libras.
3.°	El *quintal*.. .	4 arrobas.

Los médicos y boticarios usan la libra medicinal, que vale 12 onzas.

La onza vale.	8 dracmas.
La dracma.	3 escrúpulos.
El escrúpulo.	24 granos.

§. III. *Medidas de tiempo.*

1. Para medir el *tiempo* ó la *duracion* se compara con otra duracion ó *tiempo* tomada por *unidad*.

2. Las *medidas de tiempo* están determinadas por el doble movimiento de la tierra: el uno de rotacion alrededor de su eje, y el otro de traslacion alrededor del sol.

3. El movimiento de rotacion, es decir, el tiempo que emplea la tierra en este movimiento, forma un *dia*.

El *dia* tiene..	24 horas.
La *hora*..	60 minutos.
El *minuto*..	60 segundos, etc.

Siguen *terceros*, *cuartos*, etc. que se subdividen siempre en 60 partes iguales.

4.° El movimiento de traslacion, esto es, el tiempo que emplea la tierra en este movimiento, forma el año solar, que se compone de 365 dias y 0,25, ó mas exactamente, de 365 dias, 5 horas, 48 minutos, 51 segundos y 0,6.

El año *comun* ó *civil* es de 365 dias. De aquí resulta que cuatro años solares valen un dia mas que cuatro años civiles.

Para hacer coincidir estas dos especies de años se ha convenido añadir un dia cada cuarto año civil, que se llama *bisiesto*.

5. El *año civil* se divide en 12 meses.
El mes. . . . . en 4 semanas.
La semana. . . . . . en 7 dias.

6. Los meses se nombran:

Enero.	Abril.	Julio.	Octubre.
Febrero.	Mayo.	Agosto.	Noviembre.
Marzo.	Junio.	Setiembre.	Diciembre.

Nota. Los meses de enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 dias. Los de abril, junio, setiembre y noviembre tienen 30 dias, y segun que el año es ó no bisiesto, el mes de febrero tiene 29 ó 28 dias.

§. III. *Monedas españolas anteriores á la nueva ley.*

1. El *precio* de un objeto *se mide* comparándole con la unidad monetaria.

La principal unidad monetaria de España era el *peso fuerte*: este se subdivide en 20 partes, llamadas *reales*; y este en 34 partes, que se denominan *maravedises*.

En España se usaban y todavía se usan cuatro clases de monedas: 1.ª monedas de oro; 2.ª monedas de plata; 3.ª monedas de cobre, y 4.ª monedas imaginarias.

2. El nombre y valor en reales vellon de las monedas españolas de oro es el siguiente:

		Rs.	Mrs.
1.°	La *onza* de oro vale.	320	»
2.°	La *media onza* vale.	160	»
3.°	El *doblon* de oro vale.	80	»
4.°	El *doblon* vale.	60	»
5.°	El *escudo* de oro ó doblon vale.	40	»
6.°	El *escudito* de oro vale..	20	»
7.°	El *doblon* de oro de 8 escudos fabricado antes de 1772, vale.	321	6
8.°	El *doblon* de á 4 escudos vale. .	160	20
9.°	El *doblon* de oro, mitad del de á 4	80	10
10.	El *escudo* de oro.	40	5
11.	El *escudito* ó *durillo* antiguo. . .	21	8 $\frac{1}{4}$

3. El nombre y valor de las monedas de plata españolas es como sigue:

		Rs.	Mrs.
1.°	El *escudo* ó *peso fuerte* (vulgo duro) vale.	20	»
2.°	El *escudo de vellon* ó *medio peso* (vulgo medio duro) vale. . .	10	»
3.°	La *peseta mejicana* ó *columnaria*.	5	»
4.°	La *media peseta mejicana*. . .	2	17
5.°	El *real columnario* ó *mejicano*. .	1	8 $\frac{1}{2}$
6.°	La *peseta española*.	4	»
7.°	La *media peseta*.	2	»
8.°	El *realillo*.	1	»

4. Las monedas de cobre españolas y su valor en maravedises es el siguiente:

		Mrs.
1.°	La pieza de *dos cuartos* vale	8
2.°	El *cuarto*.	4
3.°	El *ochavo*.	2
4.°	El *maravedí*.	1

5. El nombre y valor de las monedas imaginarias españolas que se usan en el comercio para el cambio estranjero son las siguientes:

		Rs.	Mrs.
1.°	El *doblon* de oro, que vale 5 pesos de cambio ó 40 reales plata, equivalentes á.	75	10
2.°	El *doblon de cambio*, que vale 4 pesos ó 32 reales plata, equivalentes á. . . .	60	8
3.°	El *ducado de plata*, que vale 11 reales plata vieja, equivalentes á.	20	24
4.°	El *ducado de cambio*, que vale 11 reales y un maravedí, equivalentes á.	20	25 $\frac{15}{17}$
5.°	El *peso de cambio* ó real de á 8, que vale 8 reales de plata vieja, equivalentes á	15	2
6.°	El *real de plata de cambio* ó peseta antigua, que vale.	1	30
7.°	El *maravedí de plata vieja*, que vale. . .	»	1 $\frac{15}{17}$

8.° El *doblon de á* 4 *pesos sencillos*, su valor. 60
9.° El *peso sencillo*, equivalente á. . . . . 15 »
10. El *ducado* de vellon, igual á. . . . . 11 »
11. El *escudo* de vellon, igual á. . . . . 10 »
12. El *ducado* de 374 maravedises plata. . . 20 24

§. IV. *Del sistema métrico en general.*

1. El nuevo sistema de medidas españolas se llama *sistema métrico*, por ser el *metro* su base: llámase tambien *sistema legal* por estar prescrito su uso en todos los actos públicos, y ser obligatorio á todos desde 1.° de enero de 1860.

2. En el nuevo sistema todas las medidas están ligadas entre sí, y se derivan de una unidad principal, dicha *metro*, que puede comprobarse en todo tiempo y país. Los múltiplos y las subdivisiones de cada unidad se refieren al sistema decimal; por manera que cada unidad, diez veces mayor que la de un órden inferior, es diez veces menor que la de un órden superior.

3. Las denominaciones de los múltiplos están sacadas del griego, y las subdivisiones del latin. Estas denominaciones son unas mismas para todas las medidas.

4. Son necesarias seis palabras para expresar las seis unidades de medida; cuatro palabras para expresar los múltiplos, y tres para expresar las subdivisiones: en todo trece palabras, suficientes para conocer el conjunto del sistema. Hé aquí el cuadro:

Múltiplos.		*Unidades.*	*Subdivisiones.*	
Miria significa *diez mil.*	10000	**Metro.**	**Deci** significa *décima.*	0,1
Kilo ——— *mil* . . .	1000	**Area.**	**Centi** ——— *centésima.*	0,01
Hecto ——— *cien.* . .	100	**Metro-cúbico.**	**Mili** ——— *milésima.*	1,001
Deca ——— *diez.* . .	10	**Litro.**		
		Gramo.		
		Real.		

§. IV. *De las nuevas medidas españolas de longitud, y de su correspondencia con las antiguas.*


Decímetro.

1. Para determinar la unidad de longitud llamada *metro*, palabra griega que quiere decir *medida*, se han servido de las dimensiones del globo, á fin de obtener un tipo invariable. Ahora bien: la tierra es un cuerpo redondo ó esférico que gira sobre sí mismo en 24 horas: los dos puntos opuestos de su superficie, que permanecen fijos durante esta rotacion, se llaman *polos*. Por otra parte, la tierra está dividida en dos hemisferios por una linea llamada *ecuador*, cuyos puntos están igualmente distantes de los dos polos; y finalmente, toda línea que pasa por los dos polos, y corta al ecuador en dos puntos opuestos, se llama *meridiano*. Se ha buscado, pues, la longitud del arco de meridiano, que mide la distancia del polo al ecuador: esta longitud, que expresa el cuarto de la circunferencia de la tierra, se halló ser de 5130740 toesas, ó de 30784440 pies franceses, cuya *diez millonésima* parte se ha adoptado para la longitud del metro: por manera que este consta de 0,t513074 ó 3 pies, 07844, ó 3 pies, 11 líneas y 296 milésimas de línea (medidas francesas), que equivalen á 3,5889216 *pies españoles*, ó sea 3 *pies*, 7 *pulgadas*, 0 *líneas*, 8047.

2. Las medidas *lineales* ó *de longitud* son los múltiplos decimales, y las subdivisiones decimales del metro, es decir, que las medidas son los productos de las multiplicaciones y los cuocientes de las divisiones de metro por 10, 100, 1000, 10000, etc.

3. Los múltiplos decimales del metro son el *decámetro*, el *hectómetro*, el *kilómetro* y el *miriámetro*. Estas son las *medidas lineales propiamente dichas*. El *miriámetro* y el *kilómetro* sirven para medir las grandes distancias: el *hectómetro* y el *decámetro* para medir las distancias me-

dias: el *metro* para medir las pequeñas, como las de paños, lienzos, etc.

De los múltiplos decimales del metro y su correspondencia con las medidas lineales antiguas.

El miriámetro. Consta de 10,000 metros, equivalentes á 35889,216 *pies*, que hacen 1,7944608 *leguas* de á 20,000 pies.

El kilómetro. 0,1 *parte del mir.* Consta de 1,000 metros, equivalentes á 13588,9216 *pies.*

El hectómetro. 0,1 *parte del kil.* Consta de 100 metros, equivalentes á 358,89216 *pies.*

El decámetro. 0,1 *parte del hect.* Consta de 10 metros, equivalentes á 35,889266 *pies.*

El metro. Consta de 3.5889216 *pies.* En el comercio los múltiplos del metro se calculan decenas, centenas, miles, etc. Así; en lugar de decir *vendí un* decametro, *un* hectómetro *de paño*, se dice *vendí* ó *he vendido* 10 metros, 100 metros, etc., de paño.

Nota. Estas medidas se indican de este modo: *miriámetro* M.^{m}, *kilómetro* K.^{m}, *hectómetro* H.^{m}, *decámetro* D.^{m}

4. Las subdivisiones decimales del metro son el *decímetro*, el *centímetro* y el *milímetro.*

El decímetro. 0,1 *parte del M.* Consta de 0,1 del metro, equivalente á 4,30670592 *pulgadas.*

El centímetro. 0,01 *partes del M.* Consta de 0,01 del metro, equivalente á 5,168047104 *líneas.*

El milímetro. 0,001 *parte del M.* Consta de 0,001 del metro, equivalente á 0,5168047104 de línea.

Nota. Estas medidas se indican de este modo: *decímetro* ^{dm}, *milímetro* ^{mm}.

5. Los decimales del metro se leen en grupos de tres sílabas, como cualquier otro decimal: solamente cuando no

hay mas de tres, puede dársele el nombre particular del último decimal. Así:

4.^{m}, 045 se lee: 4 metros, 45 milésimas de metro ó 45 milímetros.

En vez de decir una longitud de 6 decímetros y 4 centímetros, se dirá pues una longitud de 64 centímetros, puesto que 6 decímetros valen 60 centímetros.

§. VI. *De las nuevas medidas españolas de superficie y su correspondencia con las antiguas.*

1. Para medir la superficie en general puede emplearse el *metro cuadrado*, es decir, un cuadrado que tiene un metro de largo y otro de ancho.

2. La medida de un cuadrado, como se demuestra en geometría, es igual al producto de la base por la altura. Si se divide, pues, cada lado del metro cuadrado en 10 decímetros, el cuadrado contendrá 10 veces 10 decímetros cuadrados, ó 100 decímetros cuadrados. De la misma manera 1 decímetro cuadrado contiene 100 centímetros cuadrados, y un centímetro cuadrado 100 milímetros cuadrados. Así:

Un *metro cuadrado* contiene:

100 decímetros cuadrados ó
10000 centímetros cuadrados ó
1000000 milímetros cuadrados.

El *metro cuadrado* se indica así: ^{mc}.

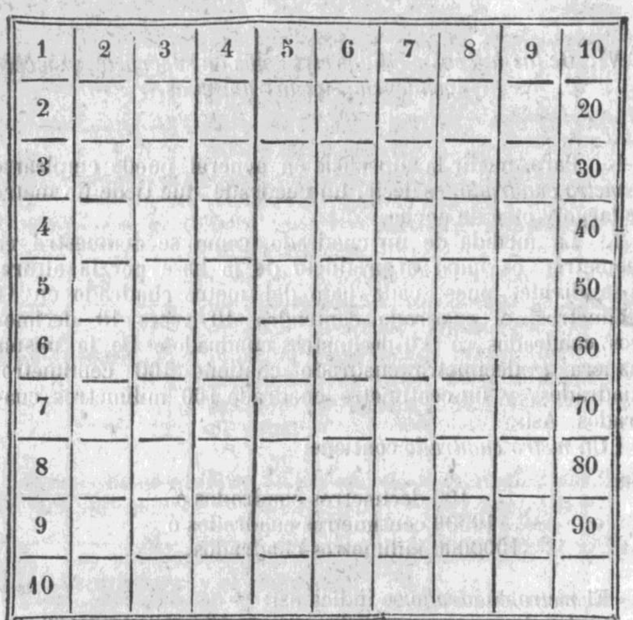
3. Un decímetro cuadrado contiene 10 veces 10 ó 100 centímetros cuadrados, y 100 veces 100 ó 10000 milímetros cuadrados.

Un centímetro cuadrado contiene 10 veces 10 ó 100 milímetros cuadrados.

Segun estos principios, si se quiere representar por un número decimal una superficie compuesta de varios metros cuadrados y de varios decímetros cuadrados, por ejemplo, de 12 metros cuadrados y 4 decímetros cuadrados, se escribirá 12^{mc},04 porque el decimetro cuadrado es la centésima parte del metro cuadrado.

Estas medidas se expresan así: *decímetro cuadrado* dm.c., *centímetro cuadrado* cm.c., *milímetro cuadrado* mm.c.

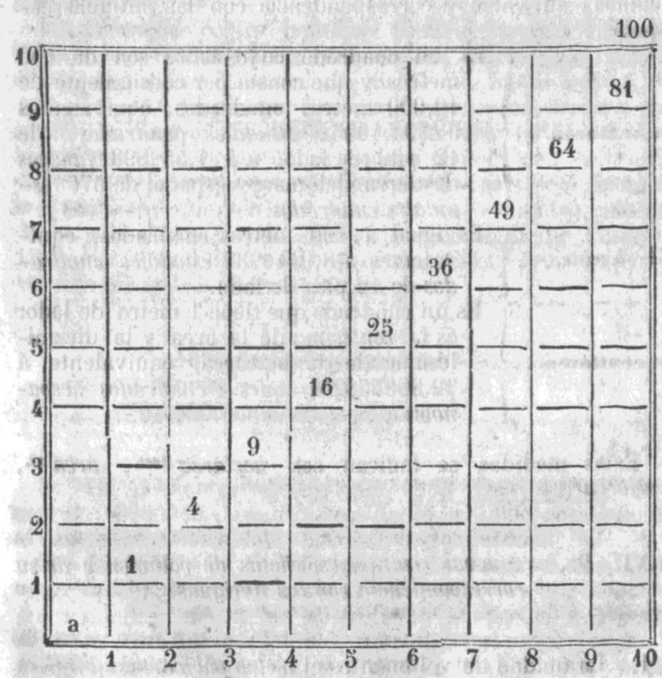
4. La simple inspeccion de la figura que ponemos á continuacion, y que á voluntad puede suponerse un *metro cuadrado*, un *decímetro cuadrado*, ó un *centímetro cuadrado*, demuestra lo que acabamos de decir.



5. Del mismo modo la figura siguiente demuestra que la medida de un *cuadrado*, ó en general de un rectángulo, es el producto de la base por la altura, ó lo que es lo mismo, de lo ancho y largo de la superficie que se valúa.

Y en efecto, tomando por unidad el cuadrado *a* en la parte inferior de la figura, y comparando con esta unidad todos los cuadrados y rectángulos trazados en la superficie del cuadrado grande, es fácil ver en primer lugar que cada uno de los números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,

100, inscritos en la diagonal del cuadrado grande, es el producto de los dos números marcados en los extremos de las líneas que se cortan en este punto; y en segundo lugar, que los productos expresan el número exacto de unidades superficiales comprendidas entre estas mismas líneas. Si consideramos la interseccion de dos líneas en un punto que corresponda á la diagonal, veremos que de estas líneas, desde la izquierda y la parte inferior del cuadrado hasta el punto de interseccion, forman con las del mismo cuadrado un rectángulo que comprende un número de unidades superficiales igual al producto de los números marcados en los extremos de las mismas líneas.



Es, pues, exacto que el *producto* de la multiplicacion de los dos números, que expresan lo largo y lo ancho de un cuadrado, ó de un rectángulo, es efectivamente la *expresion de la superficie* de este cuadrado ó de este rectángulo. De aquí se infiere, que para hallar *la superficie del cuadrado y lo mismo del rectángulo, se multiplica lo largo por lo ancho* (la base por la altura), y hablando del cuadrado solo, *se multiplica por sí mismo uno de los dos lados;* lo que se comprueba fácilmente con solo inspeccionar la figura.

6. La unidad de las medidas agrarias se llama *área:* es un cuadrado cuyo lado tiene 10 metros de largo.

7. El *área* tiene un múltiplo llamado *hectárea*, y una subdivision llamada *centiárea*. Hé aquí el cuadro de estas medidas, su valor y correspondencia con las antiguas españolas:

La hectárea...	Es un cuadrado cuyos lados son de 100 metros y que consta por consiguiente de 10,000 metros cuadrados, equivalentes á 894,46932 *estadales cuadrados*, de 12 *pies* de lado, ó á 1,552898 *fanegas* de tierra del marco español de 576 *estadales cuadrados*.
El Area....	Es igual á 100 metros cuadrados, equivalentes á 8,9446932 *estadales cuadrados* de 12 pies de lado.
La centiárea...	Es un cuadrado que tiene 1 metro de lado: es la *centésima* de la área y la diezmilésima de la hectárea, equivalente á 12.880358251 *pies cuadrados españoles*.

Estas medidas se indican así: *hectárea* $^{\text{hect.}}$, *área* $^{\text{ar.}}$, *centiárea* $^{\text{cent.}}$

§. VII. *De las nuevas medidas españolas de volúmen y de su correspondencia con las antiguas.*

1. La unidad de volúmen es el *metro cúbico.*

2. Un cubo es una figura geométrica que tiene la forma de un dado, y cuyas seis caras son cuadradas é iguales entre sí. La solidez de un cubo, segun se demuestra

en geometría, es igual á la superficie de su base multiplicada por la altura.

3 El *metro cúbico* es un cubo cuyas seis caras cuadradas tienen un metro de cada lado.

El *decímetro cúbico* es un cubo cuyas seis caras cuadradas tienen un decímetro de cada lado.

El *centímetro cúbico* es un cubo cuyas seis caras cuadradas tienen un centímetro de cada lado.

El *milímetro cúbico* es un cubo cuyas seis caras cuadradas tienen un milímetro de cada lado.

Estas medidas se indican así: *metro cúbico* $^{\text{m. cúb.}}$, *decímetro cúbico* $^{\text{dec. cub.}}$, *centímetro cúbico* $^{\text{cm.cúb.}}$, *milímetro cúbico* $^{\text{mm. cub.}}$

4. El *metro cúbico* contiene 1000 decímetros cúbicos. En efecto, el metro cuadrado consta de 100 decímetros cuadrados. Ahora bien: si se divide un metro cúbico en 100 partes que tengan por base un decímetro cuadrado y por altura un metro; si además se divide esta altura de un metro en 10 decímetros, se podrán formar con cada una de las 100 primeras partes diez nuevas partes ó decímetros cúbicos, que tendrán por base un decímetro cuadrado y por altura un decímetro: por consiguiente resultan 1000 decímetros cúbicos en un metro cúbico.

Así: un metro cúbico contiene:

1000 decímetros cúbicos,
ó 100000 centímetros cúblicos,
ó 1000000 milímetros cúbicos.

5. Un decímetro cúbico vale 1000 centímetros cúbicos, y 1000000 de milímetros cúbicos. Por consiguiente el centímetro cúbico vale 1000 milímetros cúbicos.

6. Las unidades *lineales* se suceden en gradacion *decimal*, las unidades *superficiales* en gradacion *centesimal* y las unidades *cúbicas* se suceden en gradacion *milesimal;* es decir, que tal unidad es mil veces menor que la que le sigue inmediatamente en el órden de crecimiento, y mil veces mas grande que la que le sigue en el órden de decrecimiento.

Vamos á demostrarlo.

A este fin nos servirán las figuras 1, 2, 3 y 4. Figurémonos que la línea horizontal inferior representa la longi-

Fig. 1.

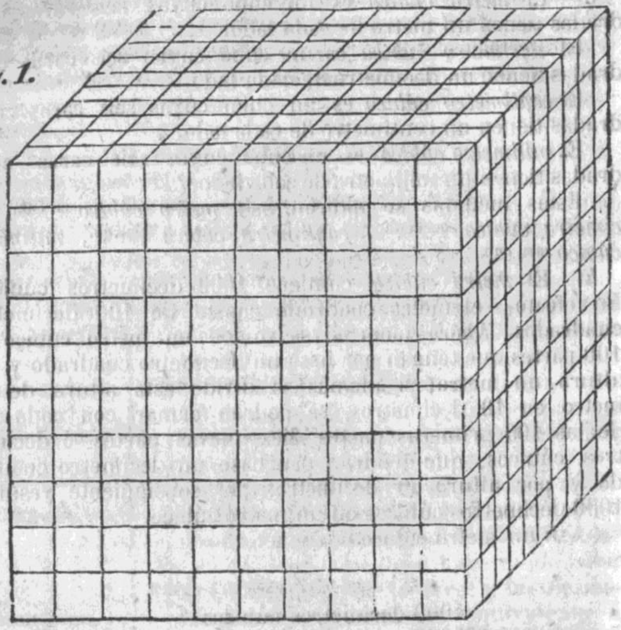


Fig. 2.

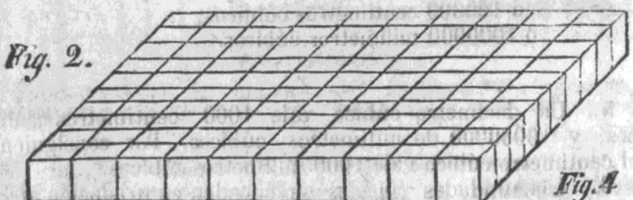


Fig. 4

3.

tud, las oblícuas de la derecha la latitud ó ancho, y la vertical del borde izquierdo el espesor ó grueso.

7. El *metro cúbico contiene mil decímetros cúbicos.*

Demostracion. Supongamos que la figura 1 sea un dado grande de piedra, de un metro cúbico, volúmen de un metro de largo por un metro de ancho y un metro de espesor ó grueso: si se divide lo grueso en diez partes iguales, cada una de estas partes, igual á la figura 2, será evidentemente una

décima del metro cúbico,

pero no será un decímetro cúbico, porque lo largo y lo ancho tiene todavía un metro: la division se ha verificado únicamente en el espesor.

8. Si ahora se corta la décima de metro cúbico en su ancho, en diez partes iguales, cada una de estas partes, igual á la fig. núm. 3, será una décima de la décima ó una

centésima del metro cúbico,

pero tampoco será un decímetro cúbico, porque la longitud es todavía un metro.

9. En fin, si se corta la centésima del metro cúbico, núm. 3, en diez partes iguales, cada una de estas partes, igual al número 4, será una

milésima del metro cúbico,

y efectivamente un

DECÍMETRO CÚBICO,

porque las tres dimensiones se han reducido á un decímetro cada una.

De consiguiente, un metro cúbico contiene mil decímetros cúbicos.

10. Veamos pues ahora cuál será en un número el lugar respectivo de cada una de las cifras propias para expresar estas cuatro cantidades diferentes. Siendo el metro cúbico la unidad principal, la cifra que exprese *metros cúbicos* ocupará naturalmente el lugar *á la izquierda de la coma.*

No siendo el decímetro cúbico sino la milésima de la unidad, la cifra que exprese milésimas ó *decímetros cúbicos* deberá ocupar *el tercer lugar á la derecha*.

11. Resta pues el primero y segundo lugar. Obsérvese que en la division del metro cúbico, para llegar al decímetro cúbico, es preciso pasar por dos divisiones intermedias, que siguen la gradacion decimal; de consiguiente los dos lugares intermedios de la escala numérica corresponden á estas divisiones por dos razones, ya se consideren estas partes como divisiones del metro cúbico, ya como múltiplos del decímetro cúbico. Así la cifra de las *décimas del metro cúbico ó centenas del decímetro cúbico, ocupará el primer lugar á la derecha de la coma*, y la cifra de las *centésimas del metro cúbico ó decenas del decímetro cúbico, ocupará el segundo lugar*. Todo esto, como se vé, está enteramente de acuerdo con la numeracion decimal.

1 DECÍMETRO CUBICO	1	Milésima
10 DECÍMETROS CUBICOS	1	Centésima
100 DECÍMETROS CUBICOS	1	Décima
1 METRO CUBICO	1,	Unidad

12. De la misma manera, *el decímetro cúbico contiene mil centímetros cúbicos.*

Demostracion. Supongamos que las figuras á que nos hemos referido en la demostracion precedente sean un decímetro cúbico, una décima, una centésima y una milésima

del decímetro cúbico, y que las dimensiones están representadas por las líneas que hemos indicado antes. Supongamos que la figura 1 representa un dado grueso de madera. Si se corta en su espesor en diez partes iguales, segun las líneas que la atraviesan, cada seccion igual, á la fig. 2, será evidentemente la

décima del decímetro cúbico;

pero no será un centímetro cúbico, porque lo largo y lo ancho tienen todavía un decímetro: solo se ha dividido el espesor ó grueso.

13. Si ahora se corta la décima del decímetro cúbico, figura 2, en su longitud en diez partes, cada seccion, igual á la figura 3, será una décima de la décima, ó la

centésima del decímetro cúbico;

pero no será tampoco un centímetro cúbico, porque la latitud ó anchura es aun de un decímetro: el cubo se ha dividido solamente en lo grueso y ancho.

14. En fin, si se corta la centésima del decímetro cúbico (fig 3) en diez partes, cada seccion, igual á la fig. 4, será la

***milésima del decímetro cúbico*,**

y efectivamente un

CENTIMETRO CUBICO,

porque las tres dimensiones se reducen á un centímetro.

De consiguiente, un decímetro cúbico contiene mil centímetros cúbicos.

15. Puesto que el centímetro cúbico no es mas que la milésima del decímetro cúbico, la cifra propia para expresar milésimas ó *centímetros cúbicos* deberá ocupar *el tercer lugar á la derecha de la coma*, cuando el *decímetro cúbico* se tome por *unidad;* el primer lugar pertenecerá á la cifra de *las décimas del decímetro cúbico ó centenas del centímetro cúbico* (fig. 2), y el segundo corresponderá á la cifra de

las centésimas del decímetro cúbico ó decenas del centímetro cúbico (fig. 3).

Notacion:

Unidad	1,	1 DECÍMETRO CUBICO
Décima	1	100 CENTÍMETROS CUBICOS
Centésima	1	10 CETÍMETROS CÚBICOS
Milésima	1	1 CENTÍMETRO CÚBICO

16. De la misma manera, el centímetro cúbico contiene mil milímetros cúbicos.

Demostracion. Supongamos que las mismas figuras representan el centímetro cúbico, la décima y la centésima del centímetro cúbico, y el milímetro cúbico, y un cálculo análogo servirá de demostracion Hecha esta suposicion, y tomando por centímetro cúbico la fig. 1, será la 2 la

décima del centímetro cúbico;

pero no es un milímetro cúbico, puesto que la longitud y la latitud tienen todavía un centímetro.

17. La figura 3 es la décima parte de la décima, y de consiguiente la

centésima del centímetro cúbico;

pero tampoco es un milímetro cúbico, porque la latitud ó lo ancho tiene aun un centímetro.

18. El núm 4 es la décima parte de la centésima ó la centésima de la décima, ó en fin la

milésima del centímetro cúbico,

y por tanto el

MILÍMETRO CUBICO,

porque cada una de las tres dimensiones no tiene mas que un milímetro.

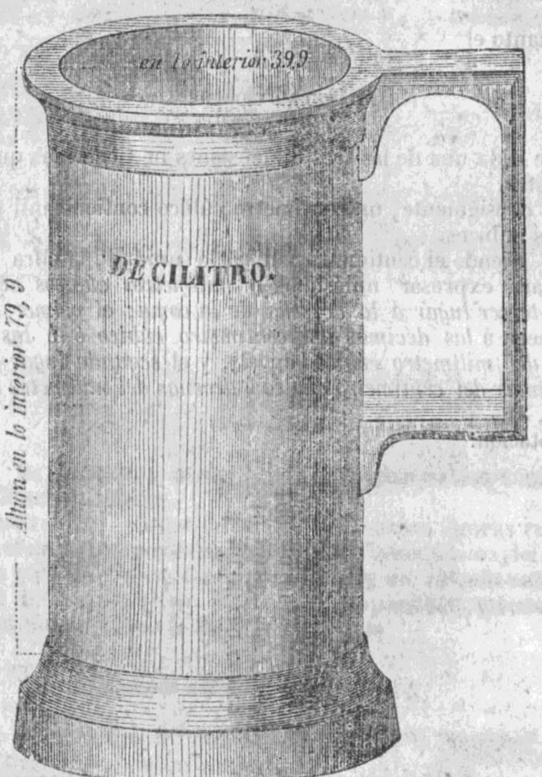
De consiguiente, un centímetro cúbico contiene mil milímetros cúbicos.

19. Siendo el centímetro cúbico la unidad, la cifra propia para expresar milésimas ó *milímetros cúbicos* ocupará el *tercer lugar á la derecha de la coma;* el *primer lugar* pertenece á *las décimas del centímetro cúbico* ó á *las centenas del milímetro cúbico* (fig. 2), y el *segundo lugar* á *las centésimas del centímetro cúbico ó decenas del milímetro cúbico* (fig. 3).

Notacion:

Unidad	1,	1 CENTÍMETRO CUBICO
Décima	1	100 MILÍMETROS CUBICOS
Centésima	1	10 MILÍMETROS CUBICOS
Milésima	1	1 MILÍMETRO CUBICO

20. La unidad de capacidad para los líquidos es el *litro*, que equivale á un decímetro cúbico En lugar de la forma cúbica que hubiera sido incómoda para el comercio, se le ha dado la forma cilíndrica.



21. Los múltiplos del *litro* empleados para los líquidos son el *hectolitro* y el *decalitro*. Sus subdivisiones son el *decilitro* y el *centilitro* Hé aquí su cuadro y correspondencia con las medidas antiguas:

El hectolitro.	Consta de 100 litros ó 100 decímetros cúbicos, equivalentes á 6,1979197 *cántaras*.
El decalitro. . . . . . 0,1 *parte del H.* . . .	Consta de 10 litros ó 10 decímetros cúbicos, que equivalen á 4,95761576 *azumbres*. Tambien se usa en Francia el *decalitro doble*, pero esta unidad no es decimal.
El litro.	Consta de un decímetro cúbico: es la unidad principal y equivale á 1,983046304 *cuartillos*.
El decilitro. . . . . . . 0,1 *parte del L.* . . .	Décima parte del litro: vale 100 centímet. cúbicos, equivalentes á 0,7932185216 *copas*.

Estas medidas se indican así: *hectolitro* $^{\text{ht.}}$, *decalitro* $^{\text{dl.}}$, *litro* $^{\text{lit.}}$, *decilitro* $^{\text{decil.}}$, *centilitro* $^{\text{cl.}}$

22. La unidad de capacidad para los granos y demás materias secas, es tambien el *litro*. Este litro tiene tres múltiplos y una sola subdivision: hé aquí su tabla y su correspondencia con las medidas de *áridos* españolas.

El kilolitro	Consta de 1000 litros. El litro equivale á un decímetro cúbico: luego el kilómetro contendrá 1000 decímetros cúbicos, ó bien un metro cúbico: esta medida equivale á 17,990874 *fanegas*.
El hectolitro. 0,1 *parte del K.*	Consta de 100 litros, que equivalen á 1,79908974 *fanegas*.
El decalitro	Consta de 10 litros, y son equivalentes á 2,158907688 *celemines*.
El litro	Unidad principal, equivale á un decímetro cúbico, y á 3,4542523 *ochavas*.
El decilitro	Es la décima parte del litro, y equivale á 1,38170092 *ochavillos*.

El *kilolitro* se indica así: k^l.

§. VIII. *De las nuevas medidas españolas de peso y de su correspondencia con las antiguas.*

1. La unidad fundamental de peso es el *gramo*. Pero como es demasiado pequeña para el uso comun, la ley declara unidad usual al *kilógramo*.

2. El *gramo* es igual á un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados sobre cero del termómetro centígrado, y pesada en el vacío.

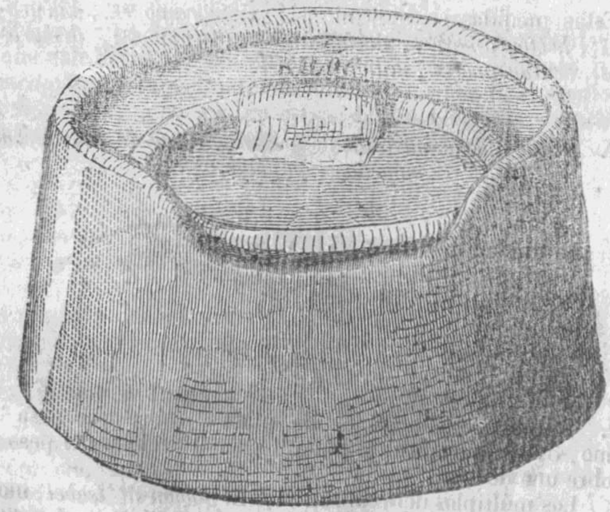
Nota. Se ha empleado el *agua destilada*, porque entonces está pura de toda otra sustancia extraña.

Se empleó á la *temperatura de 4 grados del termómetro centígrado*, porque el volúmen de los cuerpos cambia con su temperatura. Pero el agua por una excepcion notable llega á su *máximum de condensacion ó de densidad* á 4 grados del termómetro centígrado; por manera que el volúmen de una misma masa aumenta ó disminuye, partiendo de 4 grados centígrados sobre cero.

Se ha pesado el agua en el *vacío*, es decir, en un recipiente privado de aire, para hacer el peso independiente de las variaciones atmosféricas.

Para obtener el gramo se ha pesado un litro, es decir, un decímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados: se hizo un peso-patron ó norma de platino, el mas inalterable de los metales conocidos: tomóse la milésima parte de este peso, que fué llamado *gramo*, y como el litro encierra 1000 centímetros cúbicos, resulta que el *gramo* es igual á 1 centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados y pesada en el vacío.

3. El *gramo* tiene cuatro múltiplos: el *miriágramo*, el *kilógramo*, *hectógramo*, y el *decágramo*, con tres subdivisiones, el *decígramo*, el *centígramo* y el *milígramo*, y que se corresponden con las pesas españolas del modo siguiente:



El miriágramo. . . .	Consta de 10000 gramos, equivalentes á 27,734736 *libras* antiguas.
El kilógramo. . . . . . 0,1 *parte del M.* . .	Unidad usual, consta de 1000 gramos, equivalentes á 2,17341 *libras* antiguas.
El hectógramo. . . . . 0,1 *parte del K.* . .	Consta de 100 gramos, equivalentes á 3,47755776 *onzas* antiguas.
El decágramo. . . . . 0,1 *parte del H.* . .	Consta de 10 gramos, equivalentes á 5,564092416 *adarmes* ó á 16,692377248 *tom.* ó 200,307326976 *granos.*
El gramo. . 	Unidad fundamental, equivalente á 20,0307326976 *granos.*
El decigramo. . . . . . 0,1 *parte del G.* . .	Décima parte del gramo, equivalente á 2,00307326976 *granos.*
El centigramo.	Centésima parte del gramo, correspondiente á 0,200307326976 *granos.*
El miligramo. . . . . . 0,1 *parte del C.* . .	Milésima parte del gramo, equivalente á 0,0200307326 *granos.*

Estas medidas se indican así: *miriágramo* ^{mg}., *kilógramo* ^{kg}., *hectógramo* ^{hg}., *decágramo* ^{dg}., *gramo* ^{gr}., *decigramo* ^{dg}., *centígramo* ^{cg}., *milígramo* ^{milg}.

§. IX. *De las nuevas medidas de moneda, ó sea de las nuevas monedas españolas.*

1. La unidad monetaria es el real.

2. El real es una aligacion de plata y cobre que pesa 1 gramo, 315 milígramos: la plata forma 9 décimas del peso y el cobre una décima.

3. Los múltiplos del real son: 1.º El *doblon de Isabel*, moneda de oro que vale 100 reales; 2.º el *medio duro* ó *escudo*, moneda de plata que vale 10 reales. Solo hay un divisor *do*, moneda de plata que vale 10 reales. Solo hay un divisor que es la décima de real: este divisor es una moneda de cobre.

El doblon de Isabel. . . .	Vale 100 reales.
El medio duro ó escudo. .	Vale 10 reales.
El real.	Pesa un gramo, 315 milígramos.
La décima.	Vale la décima parte del real.

Nota. La ley permite además el *duro*, moneda de plata que vale 20 rs.; la *peseta*, tambien de plata, que vale 4, y la *media peseta*, igualmente de plata, que vale 2; el *medio real* ó 5 décimas, moneda de cobre; la *doble décima*, tambien de cobre; y la *media décima*, que es asimismo de cobre.

SEGUNDA SECCION. — CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS, INCOMPLEJOS Y COMPLEJOS.

§. I. *Ideas generales.*

1. Hay dos especies de números concretos: *incomplejos* y *complejos*, que tambien se llaman *denominados*.

Llámanse números *incomplejos* los que solo contienen unidades de una misma naturaleza, tales son 5 varas, 6 pesos, 7 quintales; y números *complejos* ó *denominados*, son los que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género: tales son 5 varas, 2 pies, 8 pulgadas; 3 pesos, 17 reales, 24 maravedís.

2. En la adicion y sustraccion, los números incomplejos deben estar compuestos de unidades de una misma naturaleza, y las unidades del resultado son de la misma especie que las de los números que han servido para el cálculo. Así:

La *suma* de los números 7 pies y 2 pies es 7+2 ó 9, y su diferencia 7—2 ó 5 pies.

En la multiplicacion, el multiplicador es un número esencialmente abstracto, y las unidades del producto son de la misma naturaleza que las del multiplicando. Así:

El producto de 5 reales por 3, es 3 veces 5 ó 15 reales.

En la division, cuando el dividendo y divisor están compuestos de unidades de una misma naturaleza, el cuociente es un número abstracto que con sus unidades expresa el número de veces que el dividendo contiene al divisor. Cuando el dividendo es concreto y el divisor abstracto, el cuociente es de la misma naturaleza que el dividendo; en este caso la division sirve para partir el dividendo en tantas partes iguales cuantas unidades hay en el divisor, y el cuociente expresa una de estas partes. Ejemplo:

El cuociente de 56 manzanas por 8, es el número abstracto 7, el cual expresa que 8 está contenido 7 veces en 56 manzanas, y se obtiene la 7.ª parte de 56 manzanas dividiendo 56 por 7, cuyo cuociente es 8.

3. Para convertir una parte cualquiera de un número complejo en unidades inmediatas inferiores, se multiplica esta parte por el número de veces que su unidad contiene su inferior inmediata.

Si tenemos que reducir 19 pesos á reales y 11 pulgadas á líneas, lo ejecutaremos del modo siguiente:

Conteniendo el peso 20 reales, si repetimos 20 reales diez y nueve veces, tendremos el número de reales equivalentes á 19 pesos. Siendo 20×19 ó 19×20=380, pondremos pues 380 reales, puesto que el verdadero multiplicando 20 expresa reales.

Conteniendo la pulgada 12 líneas, si repetimos 12 líneas once veces, resultará el número de líneas equivalente á 11 pulgadas. Y como 12×11=132, escribiremos 132 líneas, puesto que el multiplicando verdadero expresa líneas.

4. Para reducir un número complejo á unidades de su especie inferior, se multiplica la primera parte de la izquierda por el número de veces que la unidad de esta parte contiene la de la segunda, añadiendo al producto la segunda parte: el resultado se multiplica por el número de veces que la unidad de esta segunda parte contiene la de la tercera, añadiendo al nuevo producto esta tercera parte, y se continúan sucesivamente estas multiplicaciones y adiciones hasta llegar á la última parte del número dado.

Si tenemos que reducir 8 quintales, 3 arrobas, 18 libras, $10\frac{2}{3}$ onzas á unidades de su especie inferior, dispondremos la operacion del modo siguiente:

8 quintales, 3 arrobas, 18 libras, $10\,{}^{2}/_{3}$ onzas.
4
——
32+3=35 arrobas.
25
——
875+18=893 libras.
16
——
14288+10=14298 onzas.
3
——
42894+2=42896
——
3

Un quintal equivale á 4 arrobas: multiplicando este número por 8, y añadiendo 3 al producto, resultan 35 arrobas.

Una arroba tiene 25 libras: aumentando el producto de esta cantidad por 35 con 18, nos da 893, número de libras contenidas en las tres primeras cantidades de especie superior.

Cada libra se subdivide en 16 onzas: multiplicando este número por 893, y sumando el producto con 10, resultan 14298 onzas, que son las contenidas en las 4 primeras cantidades.

Por último, multiplicando las 14298 onzas por ${}^{3}/_{3}$ resultan $\frac{42896}{3}$, que es la unidad de especie inferior.

5. Para sacar de un número de unidades de una especie cualquiera las que contenga de la especie inmediata superior, se divide este número por el que expresa las veces que la unidad menor está contenida en la mayor inmediata.

Sea averiguar cuántos pesos fuertes hay en 475 reales.

475	20
55	23
15	

Conteniendo un peso 20 reales, habrá tantos pesos en 475 reales cuantas sean las veces que el número 20 esté contenido en 475. Por consiguiente, para obtener los pesos pedidos es preciso dividir 475 por 20. El cuociente

es 23 y la resta 15. Luego 475 reales=23 pesos 15 reales.

Para hallar las pulgadas, pies y varas contenidas en 92728 líneas, se dispone el cálculo del modo siguiente:

	Residuos.
92728	
7727 *pulgadas*	4 *líneas.*
643 *pies*	11 *pulgadas.*
214 *varas*	1 *pié.*

Averiguaremos primeramente el número de pulgadas contenidas en 92728 líneas, dividiendo por 12 esta cantidad. Obtenemos 7727 pulgadas por cuociente con un resíduo de 4 líneas. Dividiendo 7727 pulgadas por 12, sacaremos los pies que hay en este número de pulgadas: el cuociente será 643 pies con una resta de 11 pulgadas. Finalmente, dividiendo por 3 este número de pies, nos resultarán 214 varas con un pié por resíduo. El cálculo dispuesto en columnas nos muestra á primera vista que 92728 líneas equivalen á 214 varas, 1 pié, 11 pulgadas, 4 líneas.

6. Para convertir un número complejo en una fraccion que se refiera á unidades de su especie superior, se reduce á unidades de su especie inferior, dando á este resultado por denominador el número de veces que la unidad de especie inferior está contenida en la superior á que se quiere reducir todo el número complejo. La fraccion resultante se refiere á dicha unidad superior. Ejemplo:

Reducir 7 quintales, 3 arrobas, 9 libras, 12 onzas á fraccion referida á la unidad superior.

Se convierte en onzas todo el número complejo, 7 quintales, 3 arrobas, 9 libras, 12 onzas, y resultan 12556. Un quintal tiene 4 arrobas; cada una de éstas 25 libras, y una libra se subdivide en 16 onzas: el producto de todas estas cantidades nos da 1600, que es el número de onzas contenidas en un quintal. Este es el divisor del resultado, el cual se pone en la forma siguiente: $\frac{12556}{1600}$ de quintal.

7. Para reducir un número fraccionario á complejo, se divide el numerador por el denominador: el cuociente y la resta expresan unidades de la misma especie que las del dividendo. El último número se reduce á unidades de

la especie inferior, se ejecuta una segunda division, y se continúa del mismo modo, reduciendo y dividiendo hasta obtener en el cuociente la última parte entera de la unidad principal.

Si despues de una reduccion no puede ejecutarse la division correspondiente, se pone un cero en el cuociente y se procede á ejecutar la reduccion inmediata inferior. Ejemplo:

Reducir á número complejo la fraccion $\frac{12556}{1600}$ de quintal.

El cálculo se dispone del modo siguiente:

12556 *quintales*	1600
1356	
4	7 *quintales*
5424 *arrobas*	3 *arrobas*
624	
25	
3120	
1248	
15600 *libras*	9 *libras*
1200	
16	
7200	
1200	
19200 *onzas*	12 *onzas*
3200	
0000	

Los 12556 quintales divididos por 1600 nos dan 7 quintales en el cuociente, quedando 1356 por resíduo. Estos, multiplicados por 4, se trasforman en 5424 arrobas, cuyo número dividido por 1600 da un cuociente de 3 arrobas, quedando 624 en la resta. Multiplicando estas por 25, obtenemos 15600 libras, que divididas por 1600, nos dan 9 libras en el cuociente y 1200 por resta. Multiplicando estas por 16, el producto 19200 será onzas. De la division de este número por 1600 resulta un cuociente exacto, que es 12 onzas. Si quedase resíduo, como en el cuociente no hay unidades enteras de la especie superior, lo hubiéramos puesto por numerador de un quebrado cuyo denominador seria el divisor 1600: este quebrado, reducido á su menor expresion, daria el resultado de la operacion. Con este cálculo hemos obtenido de la fraccion $\frac{12556}{1600}$ de quintal, 7 quintales, 3 arrobas, 9 libras, 12 onzas.

§. II. *Adicion y pruebas de la adicion de los números complejos.*

1. Para la adicion de los números complejos se colocan las unidades de una misma especie unas debajo de las otras. Se suman primero las unidades de especie inferior, y si la suma no contiene ninguna unidad de la especie inmediata superior, se escribe el mismo número que se ha obtenido. Si compusiese una ó muchas unidades de la especie superior, se extraerian estas, añadiéndolas á la columna inmediata que expresa las unidades superiores, y solo se pondria la resta. De este modo se continúan las adiciones y sustracciones hasta llegar á la última columna. Ejemplo:

Sumar los números complejos:

7 *varas*,	2 *pies*,	9 *pulgadas*,	10 *líneas*	$\frac{3}{4}$
9 »	1 »	5 »	7 »	$\frac{4}{5}$
17 »	1 »	11 »	9 »	$\frac{1}{2}$
35 *varas*,	0 *pies*,	3 *pulgadas*,	4 *líneas*	$\frac{1}{20}$

Dispuestas las cantidades en columnas segun hemos practicado, se empieza por la suma de las fracciones del modo siguiente: $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{41}{20}$ de línea $=2$ líneas $\frac{1}{20}$: escribimos $\frac{1}{20}$, y añadimos 2 líneas á la suma 26 de la columna de líneas, y resultan 28. Este número compone 2 pulgadas y 4 líneas: ponemos 4 líneas y adicionamos las 2 pulgadas á la suma 25 de la columna pulgadas, y obtenemos por total 27 pulgadas. Este número está compuesto de 2 pies y 3 pulgadas: escribimos 3 pulgadas, y añadimos los 2 pies á la suma 4 de la columna pies, resultándonos 6 pies. Esta cantidad compone 2 varas justas: no quedando resíduo, ponemos 0 y juntamos las 2 varas á la suma 33 de la columna varas, lo que nos da 35 varas, cuya cantidad escribimos del mismo modo por no haber unidades de especie superior. La suma total que hemos obtenido es de 35 varas, 0 pies, 3 pulgadas, 4 líneas, $^1/_{20}$ de línea.

2. La prueba de la adicion compleja se hace de un modo análogo á la de los números incomplejos. Si es por sustraccion, es preciso convertir la resta de las unidades superiores en unidades inmediatas inferiores para unirlas á la parte siguiente de la suma, procediendo del mismo modo en todas las demas restas hasta concluir la operacion.

§. III *Sustraccion y prueba de la sustraccion de los números complejos.*

1. Para restar uno de otro dos números complejos, se quitan sucesivamente las diferentes unidades del sustraendo de las del minuendo, empezando por las de especie inferior para que puedan verificarse las restas. Ejemplo:

De	37 *pesos,*	0 *reales,*	12 *maravedís,*	$^1/_3$
Quitar	18 »	7 »	14 »	$^2/_3$
	18 »	12 »	31 »	$^2/_3$

Por ser $^2/_3$ fraccion mayor que $^1/_3$, no puede tener lugar entre ellos la resta: para que pueda verificarse de los 121 maravedís del minuendo, tomamos 1, que equivale á $^3/_3$, cuya fraccion unida á $^1/_3$ nos da $^4/_3$, de los cuales restando los $^2/_3$ obtendremos el resultado $^2/_3$, que escribiremos debajo de la columna correspondiente.

Como de los 12 maravedís del minuendo hemos sacado 1, quedan reducidos á 11, de los cuales no podemos restar los 14 del sustraendo sino tomando una unidad de los reales, cuyo valor 34 maravedís unido á los 11 nos da 45: quitando de este número el sustraendo 14, la resta será 31.

Para poder restar los reales, sacamos una unidad de la columna inmediata pesos, la cual equivale á 20 reales: este número se reduce á 19 por haber sacado una unidad para la resta de los maravedís. De esta cantidad restamos los 7

que hay en el sustraendo, y el resíduo 12 le ponemos debajo de su columna.

La última resta parcial es la de los pesos, cuyo minuendo 37 se ha reducido á 36 por la unidad que hemos sacado para la resta anterior: quitando de este número los 18 pesos del sustraendo, nos resultan 18, que escribimos en su lugar correspondiente.

2. La prueba de la sustraccion de los números complejos se ejecuta del mismo modo que en los incomplejos: la diferencia añadida al sustraendo debe producir el minuendo.

§. IV. *Multiplicacion de los números complejos.*

1. Pueden presentarse cuatro casos en la multiplicacion de los números complejos: 1.° multiplicar un número complejo por otro incomplejo de una sola cifra; 2.° multiplicar un número complejo por otro incomplejo de muchas cifras; 3.° multiplicar un número incomplejo por otro complejo; 4.° multiplicar un número complejo por otro complejo.

2. Primer caso. Para la multiplicacion de un número complejo por otro incomplejo de una sola cifra se multiplican todas las partes del multiplicando por el multiplicador, empezando por las unidades de especie inferior: de cada producto se sacan las unidades inmediatas superiores que contenga para añadirlas al producto siguiente. Ejemplo:

Se pide ¿cuánto costaron 8 varas de paño á 5 pesos, 16 reales, 24 maravedís, $\frac{2}{11}$ la vara?

El precio total que se busca lo obtendremos repitiendo 8 veces el multiplicando 5 pesos, 16 reales, 24 maravedís, $\frac{2}{11}$, ó lo que es lo mismo, multiplicándolo por 8.

6 *pesos,* 16 *reales,* 24 *maravedís,* $\frac{2}{11}$
8

46 *pesos,* 13 *reales,* 23 *maravedís,* $\frac{5}{11}$

Comenzaremos por las unidades inferiores: 8 veces $\frac{2}{11}$ hacen $\frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$ escribimos $\frac{5}{11}$ y retenemos el 1 para unirlo al producto de 8 por 24, lo cual da 193 maravedís, equivalentes á 5 reales 23 maravedís: pondremos 23 y los 5 reales los unimos al producto 128 reales de 8 por 16, resultando 133, cuyo número contiene 6 pesos y 13 reales: escribiremos 13 reales, y los 6 pesos los sumaremos con 40, producto de 5 por 8, lo que nos da 46. El producto total es 46 pesos, 13 reales, 23 maravedís, $\frac{5}{11}$.

3. Se llaman partes alícuotas de un número las contenidas exactamente en él. Así:

Las partes alícuotas de 12 son 6, que está contenido 2 veces; 4 que lo está 3; 3 que lo está 4; 2 que lo está 6; y 1 que lo está 12.

Las partes alícuotas de 1 son $\frac{1}{2}$ que está contenido dos veces; $\frac{1}{3}$ que lo está 3; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., todas las fracciones cuyo numerador sea 1, y todas las unidades decimales, como 0,1....., 0,001....., 0,0001, etc.

Se llama método de partes alícuotas un procedimiento que consiste en descomponer la fraccion del multiplicador en otras que sean partes alícuotas de la unidad, y tomar sucesivamente del multiplicando las partes indicadas por una fraccion, sumando despues todos estos resultados. El total es el producto que se busca.

4. Segundo caso. La multiplicacion de un número complejo por otro incomplejo de muchas cifras; se ejecuta por el método de partes alícuotas. Ejemplo:

Un tejedor fabrica 12 varas, 2 pies, 4 pulgadas, 3 líneas, $\frac{2}{11}$ en un dia. ¿Cuántas fabricará en 12 dias?

La operacion se dispone del modo siguiente:

	12 varas,	*2 piés,*	*4 pulg.,*	*3 lín.,*	$\frac{2}{11}$.
	12				
12 veces 12 varas son.	144 varas,	0 pies,	0 pulg.,	0 líneas.	
12 veces 1 vara darán 12 varas.					
12 veces 2 pies equivalen á los $\frac{2}{3}$ de 12 varas ó á. . .	8	0	0	0	
12 veces 1 pié darán 4 varas.					
12 veces 4 pulgadas equivalen á $\frac{1}{3}$ de 4 varas ó á. . . .	1	1	0	0	
12 veces 1 pulgada darán un pié.					
12 veces 3 líneas equivalen á $\frac{1}{4}$ de 1 pié ó á..	0	0	3	0	
12 veces 1 línea darán 1 pulgada.					
12 veces $\frac{2}{11}$ de línea equivalen á $\frac{24}{11}$ de línea ó á.. . . .	0	0	0	2	$\frac{2}{11}$.
12 veces 12 varas, 2 piés, 4 pulgadas, 3 líneas y $\frac{2}{11}$ dan,	153 varas,	1 pié,	3 pulg.,	2 lín.,	$\frac{2}{11}$.

Efectuamos primero la multiplicacion de 12 varas por 12 por el procedimiento ordinario.

En seguida decimos: 12 veces 1 vara dan 12 varas; pero 2 pies son los $\frac{2}{3}$ de una vara: luego 12 veces 2 pies equivaldrán á los $\frac{2}{3}$ de 12 varas ú 8 varas, lo cual escribiremos en la columna varas.

12 veces un pié dan 4 varas; pero 4 pulgadas es el $\frac{1}{3}$ de un pié: luego 12 veces 4 pulgadas equivalen á $\frac{1}{3}$ de 4 varas ó 1 vara 1 pié, que ponemos en sus columnas correspondientes.

12 veces 1 pulgada darán 1 pié: pero siendo 3 líneas el $\frac{1}{4}$ de 1 pulgada, 12 veces tres líneas equivaldrán á $\frac{1}{4}$ de pié ó 3 pulgadas, que escribimos en la columna pulgadas.

Finalmente, puesto que 12 veces 1 línea dan 1 pulgada, 12 veces $\frac{2}{11}$ de línea darán 2 líneas $\frac{2}{11}$, que ponemos en la columna de las líneas.

La suma de los productos parciales de las diferentes partes del multiplicando por el multiplicador es 153 varas, 1 pié, 3 pulgadas, 2 líneas, $\frac{2}{11}$.

Se usa un procedimiento análogo para las demas especies de números complejos.

5. Tercer caso. La multiplicacion de un número incomplejo por otro complejo, se verifica del mismo modo que la de un número complejo por otro incomplejo, puesto que se puede cambiar el órden de los factores sin que por eso se altere el producto: únicamente debemos atender á indicar el producto con la unidad de la especie del verdadero multiplicando.

6. Cuarto caso. La multiplicacion de un número complejo por otro complejo se ejecuta multiplicando primero el multiplicando por cada parte del multiplicador. Se empieza por la unidad de especie superior de éste y por la derecha del multiplicando, haciendo las extracciones necesarias, ó bien por su izquierda, aplicando el método de partes alícuotas. Con las otras partes del multiplicador se empieza siempre por la izquierda, empleando las partes alícuotas. Ejemplo:

Un quintal de arroz cuesta 11 pesos, 15 reales, 7 maravedís. ¿Cuánto costarán 19 quintales, 3 arrobas, 12 libras y 8 onzas?

		11 pesos,	15 reales,	7 maravedís,			
		19 quints.	3 arrob.	12 libras;	8 onzas.		
1.er caso.		223 pesos,	8 reales,	31 maravedís,			
2.º caso.	2 arrobas.	5 »	17 »	20 »	$\frac{1}{2}$	100	200
	1 »	2 »	18 »	27 »	$\frac{1}{4}$	50	
	5 libras.. . .	0 »	11 »	25 »	$\frac{17}{20}$	170	
	5 »	0 »	11 »	25 »	$\frac{17}{20}$	170	
	1 »	0 »	2 »	11 »	$\frac{97}{100}$	194	
	1 »	0 »	2 »	11 »	$\frac{97}{100}$	194	
	8 onzas.. . .	0 »	1 »	5 »	$\frac{197}{200}$	197	
		233 pesos,	14 reales,	24 mrs.	$\frac{3}{8}$	$\frac{1035}{200}$	

Para obtener lo que valen 19 quintales multiplicamos todo el multiplicando por 19, empezando por la derecha y haciendo las extracciones necesarias como en el primer caso. El producto es 223 pesos, 8 reales, 31 maravedís.

El valor de 3 arrobas, 12 libras, 8 onzas, lo buscamos por el método de partes alícuotas.

3 arrobas es igual á 2 arrobas+1 arroba.

El precio de 2 arrobas es la mitad del precio de un quintal ó 5 pesos, 17 reales, 20 maravedís, $\frac{1}{2}$.

Una arroba vale la mitad de dos arrobas ó 2 pesos, 18 reales, 27 maravedís $\frac{1}{4}$.

12 libras es igual á 5 libras+5 libras+1 libra+1 libra.

El valor de 5 libras es la quinta parte del valor de 1 arroba ó 0 pesos, 11 reales, 25 maravedís, $\frac{17}{20}$.

Se pone por segunda vez este valor para obtener el de las otras 5 libras.

El precio de una libra es la quinta parte de 5 libras ó 0 pesos, 2 reales, 11 maravedís, $\frac{97}{100}$.

Para el precio de la otra libra se escribe otra vez esta misma cantidad.

El valor de 8 onzas es la mitad del de una libra ó 0 pesos, 1 real, 5 maravedís, $\frac{197}{200}$.

Sumamos estos productos parciales empezando por las fracciones. Estas se reducen todas á un comun denominador: se suman los numeradores, y de la fraccion total $\frac{1075}{200}$ se sacan los enteros que contiene, los cuales se añaden á la columna inmediata. El quebrado que queda por resíduo, reducido á su mas sencilla expresion, nos da $\frac{3}{8}$. La suma total de los otros productos parciales es 233 pesos, 14 reales, 24 maravedís; y el producto total 233 pesos, 14 reales, 24 maravedís, $\frac{3}{8}$.

7. En la multiplicacion de los números complejos, las unidades del resultado son de la misma naturaleza que las del multiplicando: el multiplicador se considera como abstracto.

8. La prueba de una multiplicacion de números complejos, se ejecuta multiplicando el duplo de uno de los factores por la mitad del otro. El segundo producto ha de ser absolutamente el mismo que el primero.

§. V. *Division de los números complejos.*

1. La division de los números complejos presenta dos casos: 1.° aquel en que los dos términos son de una misma especie; 2.° cuando los dos términos son de especie diferente.

2. PRIMER CASO. Cuando el dividendo y divisor son de una misma especie, se reducen ambos á unidades de la menor de sus especies; se divide el número que representa el dividendo por el que forma el divisor, y el cuociente recibe el nombre de las unidades que indica el problema. Ejemplo:

El precio de una vara de tejido es de 17 pesos, 10 reales, 6 maravedís. ¿Cuántas se podrán fabricar por 156 pesos, 15 reales, 11 maravedís?

La operacion se dispone del modo siguiente:

156 pesos, 15 rs., 11 mrs.
20

3120 rs.+15 rs.=3135 rs.
34 mrs.

12540
9405

106590 mrs.+11 mrs.=106601 mrs.

17 pesos, 10 rs., 6 mrs.
20 rs.

340 rs.+10 rs.=350 rs.
34 mrs.

1400
1050

11900 mrs.+6 mrs.=11906 mrs.

106601 | 11906

113538 varas, 2 piés, 10 pulgadas, 3 líneas $\frac{5565}{5953}$

3 piés.
34059 piés.
10247
12 pulgadas.

20494
10247

122964 pulgadas.
003904
12 líneas.

7808
3904

46848 líneas.
11130

Reducimos á maravedís los dos números propuestos 156 pesos, 15 rs., 11 mrs. y 17 pesos, 10 rs., 6 mrs. El primero nos da 106601 mrs., el segundo 11906 mrs. Costando la vara 11906 mrs., tendremos tantas varas como veces este número esté contenido en 106601 mrs. Esto nos conduce á la division de 106601 mrs. por 11906 mrs.

El cuociente que resulta de esta operacion es 8 varas, quedando un resíduo de 11353 varas.

Esta resta la reducimos á piés, multiplicándola por 3: el producto 34059 piés lo dividimos por 11906, y obtenemos en el cuociente 2 piés con una resta de 10247 piés.

Esta cantidad la multiplicamos por 12 para que resulten pulgadas, y nos da 122964 pulgadas, las cuales dividimos por 11906. El cuociente es 10 pulgadas y la resta 3904 pulgadas.

Multiplicando este resíduo por 12, obtenemos 46848 líneas, las cuales divididas por 11906 dan en el cuociente 3 líneas y una resta de 11130 líneas, que ponemos por numerador de un quebrado, cuyo denominador es 11906. Este quebrado, reducido á su menor expresion, se convierte en $\frac{5565}{5953}$ el cual ponemos por última parte del cuociente.

El cuociente total es 8 varas, 2 piés, 10 pulgadas, 3 líneas $\frac{5565}{5953}$.

3. Segundo caso. Cuando el dividendo y divisor no son de una misma especie, se convierte el divisor en fraccion de la unidad principal, despues se multiplica el dividendo por el denominador de esta fraccion y se divide el producto por el numerador, que se considera como número abstracto: en este caso el cuociente es siempre de la misma naturaleza que el dividendo. Ejemplo:

Si 27 quintales, 2 arrobas, 7 libras, 9 onzas de arroz importan 276 pesos, 14 reales, 8 maravedís, ¿cuánto valdrá un quintal?

La operacion se dispone de este modo:

27 *quintales*, 2 *arrobas*, 7 *libras*, 9 *onzas*.
4 *arrobas*.

108 *arrobas*+2 *arrobas*=110 *arrobas*
25 *libras*

550
220

2750 *libras*+7 *lib.*=2757 *lib.*
16 *onz.*

16542
2757

1 *quintal*=4 *arrobas*=100 *libras*=1600 *onzas* 44112 *onzas*+9 *onzas*=44121.

$\frac{44121}{1600}$ Fraccion de la unidad principal.

276 *pesos*, 14 *rs.*, 8 *mrs.*
1600

165600
276

10 *rs.* 800
4 320
8 *mrs.* . . . . 18 *pesos*, 16 *rs.*, 16 *mrs.*

442738 *pesos*, 16 *rs.*, 16 *mrs.*

442738 *pesos*, 16 *rs.*, 16 *mrs.* | 44121
111528 | 10 *pesos*, 0 *reales*, 23 *maravedís*. $\frac{24817}{44121}$
20 *rs.*

30560 *rs.*+16 *rs.*=30576 *rs.*
34 *mrs.*

122304
91728

1039584 *mrs.* + 16 *mrs.* = 1039600
157180
24817

Reducimos los 27 quintales, 2 arrobas, 7 libras, 9 onzas á fraccion de quintal: el resultado de la operacion nos da $\frac{44121}{1600}$ de quintal, cuyo precio es 276 pesos, 14 reales, 8 maravedís. El valor de 44121 quintales será 1600 veces mayor. Para hallarlo, multiplicamos 276 pesos, 14 reales, 8 maravedís por 1600: el producto 442738 pesos, 16 reales, 16 maravedís será el precio de 44121 quintales.

Para hallar lo que cuesta un quintal, dividimos 442738 pesos, 16 rs., 16 mrs. por 44121 : el cuociente 10 pesos, 0 rs., 23 mrs. $\frac{24817}{41412}$ expresa aquel valor.

4. La prueba de una division de números complejos se ejecuta multiplicando el divisor por el cuociente si los dos términos son de una misma naturaleza, y se multiplica el cuociente por el divisor si los dos términos son de especie diferente. En ambos casos el producto es exactamente igual al dividendo si está bien hecha la operacion.

TERCERA PARTE.

RESOLUCION DE PROBLEMAS POR EL METODO DE LA UNIDAD.—RAZONES Y PROPORCIONES.

Primera seccion.—Metodo por medio del cual todos los problemas de la aritmetica se resuelven por las solas combinaciones de las cuatro reglas, ó sea metodo de la unidad (1).

§. I. *Problemas que se resuelven por medio de una multiplicacion y de una division.—Regla de tres simple.*

1. Problema I. *Un metro de paño ha costado 25 rs. Hallar el precio de 3 metros.*

Multiplíquese 25 rs., precio del metro, por el número de metros 3: el producto 75 rs. es el precio pedido.

Problema II. *Calcular el precio de un metro de paño habiendo costado 3 metros 192 rs.*

Divídase 192 rs. por el número de metros 3: el cuociente 64 es el precio buscado

Problema III. *Un metro de paño cuesta 25 pesetas: ¿cuánto paño podremos comprar con 100 pesetas?*

Divídanse las 100 pesetas por 25, precio de un metro, y

(1) El método por el cual vamos á resolver algunos problemas se llama *método de la unidad*, porque consiste principalmente en buscar desde luego el valor de la unidad de la cantidad desconocida para multiplicarle en seguida por el número enunciado en el problema.

el cuociente 4 expresará el número de metros que podemos comprar.

PROBLEMA IV. *Cuatro trabajadores hicieron 20 kilómetros de labor: ¿cuántas hectáreas harán 9?*

Puesto que 4 trabajadores hicieron 20 kilómetros de labor,

1 trabajador haria $^1/_4$ de 20 kilómetros ó $\frac{20}{4}$:

Los 9 trabajadores harán, pues, 9 veces $\frac{20}{4}$ ó $\frac{20\times9}{4}=45$ kilómetros.

PROBLEMA V. *Se han empleado 4 dias para hacer 20 kilómetros de labor: ¿cuántos dias se necesitarán para hacer 45?*

Puesto que 20 kilómetros se han hecho en cuatro dias,

1 se haria en la 20 ava parte de 4 dias ó en $\frac{4}{20}$.

Los 45 kilómetros se harán, pues, en 45 veces $\frac{4}{20}$ ó en $\frac{4\times45}{20}$; ó en 9 dias.

PROBLEMA VI. *Tres jornaleros hicieron una obra en 15 horas: ¿cuántas horas emplearian 5 jornaleros para hacer la misma obra?*

Puesto que 3 jornaleros han hecho la obra en 15 horas,

1 haria la misma obra en 15 h.×3.

Los 5 trabajadores la harán por consiguiente en $\frac{15\text{h.}\times3}{5}$ ó sea en 9 horas.

§. II. *Regla de tres compuesta.*

1. PROBLEMA. VII. *Dos jornaleros trabajando 2 horas por dia hicieron 90 kilómetros de labor en 5 dias: ¿cuántos kilómetros harán de la misma labor 3 jornaleros en 2 dias trabajando 7 horas por dia?*

Para resolver este problema se necesita atender sucesivamente al número de jornaleros, á las horas y á los dias.

1.° Conociendo la labor hecha por 2 jornaleros, para deducir la labor hecha con las mismas circunstancias por 3, se dirá:

Puesto que 2 jornaleros hicieron 90 kilómetros de labor,

1 jornalero haria la mitad de 90 kilómetros ó 45 kilómetros.

Los 3 jornaleros harian por consiguiente 3 veces 45 kilómetros ó 135 kilómetros.

Los 3 jornaleros trabajando 3 horas por dia harán, pues, 135 kilómetros.

2.° Del mismo modo, para deducir de la labor 135 kilómetros hechos con un trabajo de 3 horas, la labor que deberá hacerse con un trabajo de 7 horas, permaneciendo idénticas las demás circunstancias, se dirá:

Puesto que la labor hecha con un trabajo de 3 horas es 135 kilómetros,

La labor hecha con un trabajo de 1 hora seria el $^1/_3$ de 135 ó 45 kilómetros.

La labor hecha con un trabajo de 7 horas, será 7 veces 45 kilómetros ó 315 kilómetros.

3.° Finalmente, para deducir de la labor 315 kilómetros hechos en 5 dias, la que podrá hacerse en 2 dias, permaneciendo idénticas las demás circunstancias, se dirá:

Puesto que la labor hecha en 5 dias es 315 kilómetros,

La de un dia será $^1/_5$ de 315 kilómetros ó 63 kilómetros.

La labor hecha en 2 dias será 2 veces 63 kilómetros ó 126 kilómetros.

Los 3 jornaleros trabajando 7 horas por dia durante 2 dias, harán pues 126 kilómetros.

2. Se simplifican los cálculos indicando únicamente las multiplicaciones y divisiones, porque sucede á menudo que pueden suprimirse los factores comunes á ambos términos del quebrado. Así en el problema precedente se dirá:

2 jornaleros trabajando 3 horas por dia hacen en 5 dias 90 kilómetros.

1 jornalero trabajando 3 horas por dia hace en 5 dias la mitad de 90 kilómetros ó $\frac{90}{2}$;

3 jornaleros trabajando 3 horas por dia hacen en 5 dias tres veces 90 kilómetros ó $\frac{90 \text{ kilómetros} \times 3}{2}$.

3 jornaleros trabajando 1 horas por dia hacen en 5 dias $1/_3$ de $\frac{90 \times 3}{2}$ ó $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3}$;

3 jornaleros trabajando 7 horas por dia hacen en 5 dias 7 veces $\frac{90 \times 3}{2 \times 3}$ ó $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3}$;

3 jornaleros trabajando 7 horas por dia hacen en 1 dia $1/_5$ de $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3}$ ó $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5}$:

Luego 3 jornaleros trabajando 7 horas por dia hacen en 2 dias el duplo de $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5}$ ó $\frac{90 \times 3 \times 7 \times 2}{2 \times 3 \times 5}$.

Y suprimiendo los factores 2 y 3 comunes á ambos términos de esta última fraccion, el número de los kilómetros buscado se reduce á $\frac{90 \times 7}{3} = 126$ kilómetros.

3. Problema VIII. *Dos jornaleros trabajando 3 horas por dia hicieron 90 kilómetros de labor en 5 dias: ¿cuántos dias necesitarán 3 jornaleros que trabajen 7 horas por dia para hacer 126 kilómetros de labor?*

Se hallará, como en el precedente problema, que 3 jornaleros trabajando 3 horas por dia durante 5 dias hacen $\frac{90 \times 3 \times 7}{2 \times 3}$ ó 315 kilómetros.

Para deducir:

3 jornaleros trabajando 7 horas por dia, cuántos dias ocuparán en hacer 126 kilómetros.

Es suficiente, siendo uno mismo el número de jornaleros y horas de trabajo, resolver la cuestion siguiente:

Unos jornaleros hicieron 315 kilómetros en 5 dias: ¿cuánto tiempo necesitarán los mismos para hacer 126?

Puesto que 315 kilómetros de labor se han hecho en 5 dias,

1 kilómetro se hará en $\frac{5}{315}$ de dia ó en $\frac{1}{63}$ de dia.

Los 126 kilómetros se harán, pues, en 126 veces $\frac{1}{63}$ de dia ó en 2 dias.

Si nos limitamos á indicar las multiplicaciones y divisiones, se hallará que el número de dias pedido es:

$$\frac{5 \times 2 \times 3 \times 126}{90 \times 3 \times 7} \text{ ó } \frac{5 \times 2 \times 126}{90 \times 7} \text{ ó dos dias.}$$

§. III. *Regla de compañía y de sociedad.*

1 La regla de *compañía* ó de *sociedad* es la que tiene por objeto dividir entre varios sócios las ganancias ó pérdidas que resulten de su asociacion.

La ganancia ó pérdida de cada asociado depende del capital y del tiempo que haya permanecido en la sociedad.

2. Problema IX. *El capital de los tres sócios es: el del 1.° 300 pesos fuertes, el del 2.° 500 y el del 3.° 700; la ganancia total es de 4,500 pesos fuertes: ¿cuál es la de cada asociado?*

Siendo la suma de los tres capitales 1500 pesos, diremos:

Puesto que á 1500 pesos fuertes corresponden 4500 de ganancia,

A 1 le corresponden $\frac{4500}{1500}$ ó 3 pesos.

Las ganancias relativas de los capitales 300, 500, 700, serán pues:

3×300, 3×500, 3×700, ó sea 900 pesos, 1500 pesos y 2100 pesos.

Problema X. *Los capitales de tres sócios son: 100 pesos, 250 pesos y 50 pesos. El primer capital ha permanecido 3 meses en la sociedad, el segundo 2 y el tercero 14:*

la ganancia total es 4,500 pesos: ¿cual es la ganancia relativa de cada capital?.

Si todos los capitales hubiesen permanecido el mismo tiempo en la sociedad, las ganancias serian fáciles de determinar: es preciso por consiguiente buscar cuáles serian los capitales que permaneciendo un mismo tiempo en la sociedad proporcionarian la misma ganancia que los capitales propuestos.

Ahora bien: 100 pesos durante 3 meses, ganan lo mismo que 3 veces 100 pesos ó 300 pesos en 1 mes: 250 pesos en 2 meses es lo mismo que 2 veces 250 pesos ó 500 pesos en 1 mes: y 50 pesos en 14 meses es lo mismo que 14 veces 50 pesos ó 700 pesos en un mes.

La suma de los capitales durante 1 mes es 1500 pesos: la suma que se ha de dividir es 4500 pesos; y puesto que para 1500 pesos de capital tenemos 4500 de ganancia, para 1 peso tendremos $\frac{4500}{1500}$ ó 3 pesos.

Luego el 1.er sócio por 300 pesos tendrá 3×300 ó 900 ps.
el segundo por 500 pesos tendrá 3×500 ó 1500 ps.
el tercero por 700 pesos tendrá 8×700 ó 2100 ps.

Ganancia total 4500 ps.

§. IV *Regla de interés simple.*

1. El *interés* ó *rédito* es el beneficio que el prestamista saca de su dinero, ó sea la retribucion que exige del que toma á préstamo, para compensar las ventajas de que hubiera podido gozar manejando por sí mismo sus fondos.

La suma prestada se llama *capital*.

2. Llámase *tanto por ciento* el beneficio que procura una suma de 100 reales impuestos durante un año. Por ejemplo:

Cuando 100 reales ganan 5 de interés al año, se dice que el *tanto por ciento* es al 5 por 100 al año, ó simplemente al 5 por 100, que se indica así: 5 p. %.

3. Llámase *tanto de la unidad* el número por el cual

es necesario dividir un capital para obtener su interés anual. Por ejemplo:

Cuando el *tanto por ciento* es 5 por 100, el interés, siendo la *vigésima* parte del capital, se dice que el *tanto de la unidad* está al 20.

En general se obtiene el *tanto de la unidad* dividiendo 100 por el *tanto por ciento*, y se halla el tanto por ciento dividiendo 100 por el *tanto de la unidad*.

4. Hay dos especies de interés: el *simple* y el *compuesto*.

El interés es *simple* cuando el capital permanece el mismo durante todo el tiempo del préstamo. En este caso el interés de un capital durante varios años se obtiene multiplicando por el número de años el *interés* ó *rédito* de este capital en un año. Así:

El capital estando impuesto al 5 por 100, el *interés simple* de 100 reales en tres años es tres veces 5 reales ó 15 reales, y el interés de 100 reales en 1 mes es $\frac{5}{12}$ de real.

5. En el cálculo relativo á los *intereses* ó *réditos* se supone cada mes de 30 dias y el año de 360; por manera que el interés de un dia es la 360 ava parte del de un año; pero calculando los intereses ó réditos á razon de un número de dias trascurridos, se cuentan 365 dias en el año.

6. Cuando el dinero está al 5 por 100, el interés de 1 real es $\frac{5}{100}$ de real ó $\frac{1}{20}$: luego el interés anual de cualquier capital es la 20 parte de este capital. Así:

El interés anual de 480000 reales será $\frac{480000}{20}$ ó 24000 reales.

7. El interés es *compuesto*, cuando se une al capital para producir nuevo interés ó rédito. Lo que se llama tener en cuenta los *intereses de los intereses*.

8. En los cinco problemas siguientes se supone que no se tienen en cuenta mas que los *intereses simples*, y que el dinero está al 5 por 100. El interés de una suma cualquiera será la 20 parte de esta suma, y el interés durante un número ya entero, ya fraccionario de años, se obten-

drá multiplicando el interés de un año por el número de años.

Problema XI. *¿Cuánto vale un capital de 480000 reales en 3 años?*

Este problema puede resolverse de dos modos:

1.° Siendo la 20 ava parte de 480000 reales ó 24000 reales el interés de los 480000 reales, estos redituarán en 3 años el triplo de 24000 reales ó 72000. Así los 480000 reales valdrán en 3 años, 480000 rs.+72000 reales ó sea 552000 reales.

2.° El interés de 100 reales en un año siendo. . . 5
El interés de 1 real en un año será. . . . $^1/_{20}$
El interés de 1 real en 3 años será. . . . $^3/_{20}$
1 real valdrá pues en 3 años 1 real, mas su interés $^3/_{20}$ de real ó sea. . . . . $1\,^3/_{20}$

480000 reales valdrán por consiguiente en 3 años $\frac{3}{20}\times480000$ ó sea 552000 reales.

Problema XII. *¿Cuánto valdrán 480000 reales en 3 años y 4 meses ó en 40 meses?*

Este problema puede resolverse de dos maneras:

1.ª Los 480000 reales reditúan:
en 12 meses la 20 ava parte de 480000 reales ó. . . . . 24000 rs. ó
en 1 mes la 12 parte de 24000 rs., ó 2000
en 40 meses 40 veces 2000 rs., ú 80000

Luego 480000 reales valdrán en 40 meses 480000+80000 ó 560000 reales.

2.ª El interés de 1 real en 1 año, siendo. $^1/_{20}$ de real.

El interés de 1 real en 1 mes será. $\frac{1}{20\times12}$

El interés de 1 real en 40 meses es $\frac{1\times40}{20\times12}$ ó......... $\frac{1}{6}$.

1 real vale, pues, en 40 meses 1 real $\times\frac{1}{6}$ de real ó $\frac{7}{6}$.

Luego 480000 reales valdrán en 40 meses $\frac{7}{6}\times480000$ ó 560000 reales.

Problema XIII. *¿Cuánto valen al contado 560000 reales pagaderos en 40 meses?*

Una suma pagadera á cierto tiempo, siendo el producto del valor de 1 real en este mismo tiempo, multiplicado por el número de reales del capital, si dividimos 560000 reales por $^7/$, valor de 1 real á los 40 meses, obtendremos por cuociente 480000 reales, valor en dinero contante de los 560000 reales pagaderos á 40 meses.

Problema XIV. *¿En cuántos años un capital de 480000 reales valdrá 560000 reales?*

Siendo 80000 reales la diferencia entre estos dos números, se trata de hallar por cuánto tiempo debe imponerse la suma de 480000 reales para reportar el interés simple de 80000 reales.

El interés de 1 real en 1 año, siendo $\frac{1}{20}$.

El interés de 480000 reales en 1 año es $\frac{1}{20}\times480000$ ó 24000 reales

Puede, pues, decirse: puesto que siendo el capital 480000 reales,

El interés de 24000 reales corresponde á un año.

El interés de 1 real corresponde á $\frac{1\text{ año}}{24000}$.

Luego el interés de 80000 reales corresponde á $\frac{1\text{ año}}{24000}\times80000$ ó á $\frac{10\text{ años}}{3}$ ó á 3 años y 4 meses.

Problema XV. *Un capital de 480000 reales, aumentado con sus intereses simples durante 40 meses, vale al cabo de este tiempo 560000 reales: ¿á qué tanto por 100 ha sido impuesto?*

El interés de 480000 reales en 40 meses,
siendo 560000 reales—480000 reales ú 80000 rs.

El interés de 1 real en 40 meses es $\frac{80000}{480000}$ ó $\frac{1}{6}$ de real.

El interés de 1 real en 1 mes es $\frac{1}{6\times40}$ ó $\frac{1}{240}$.

El interés de 1 real en 12 meses es 12 veces $\frac{1}{240}$ ó $\frac{1}{20}$ de real.

El interés anual de 100 reales es $\frac{1}{20}\times100$ ó 5 reales.

Luego el dinero se habia impuesto el 5 por 100.

PROBLEMA XVI. *¿Cuál es el interés ó rédito de 48000 reales impuestos durante 5 años al 6 por 100 anual?*

El interés de 100 reales en 1 año, siendo 6 reales

El interés de 1 real en 1 año es $\frac{6}{100}$ de real.

El interés de 1 real en 3 años es 3 veces $\frac{6}{100}$ ó $\frac{6\times3}{100}$.

Luego 48000 reales redituarán en 3 años 48000 veces $\frac{6\times3}{100}$ ó $\frac{6\times3\times48000}{100}$ ú 8660 reales.

§. V. *Regla de descuento.*

1. El *descuento* es la rebaja que debe hacerse en el valor de un pagaré, pagadero á cierto tiempo, cuando quiere hacerse efectivo antes del vencimiento.

2. Hay dos clases de descuentos: el *descuento de interés simple*, y el *descuento de interés compuesto.*

El *descuento de interés simple* es igual á la diferencia entre la suma inscrita en el pagaré y el valor actual de esta suma en dinero contante, es decir, al interés simple del valor actual del capital.

El *descuento de interés compuesto* es el interés tomado sobre la suma inscrita en el pagaré, es decir, sobre el capital aumentado en sus intereses. Este descuento comprende por consiguiente el interés del capital primitivo, mas el *interés* del *interés de este capital.*

3. Los ejemplos siguientes explican ambos géneros de descuentos.

Cuando el dinero está al 5 por 100, 100 rs. contantes valen 105 rs. en un año. Un pagaré de 105 rs. pagadero en un año no vale, pues, mas que 100 rs. al contado, debiendo por consiguiente sufrir un descuento de 105—100 ó de 5 rs. cuando se quiere hacerle efectivo en el acto. El *descuento de interés simple* de 105 rs. será 105—100 ó 5 reales.

Para tomar el *descuento de interés compuesto* de 105 reales á 5 por 100, se dirá:

El descuento de 100 rs. siendo 5 rs.

El descuento de 1 real es $\frac{5}{100}$ ó $\frac{1}{20}$ de real.

El descuento de 105 será, pues, ó $\frac{105}{20}$ ó $\frac{21}{4}$ ó $5\frac{1}{4}$.

Un pagaré de 105 rs. pagadero en un año, y que representa un capital de 100 rs., sufrirá, pues, una rebaja de 5 reales $\frac{1}{4}$, si se desea hacer efectivo en el acto, no recibiendo en dinero contante mas que $105-5\frac{1}{4}$ ó $99\frac{3}{4}$.

Vemos, pues, que el *descuento de interés compuesto* 5 reales y $\frac{1}{4}$ de real comprende el interés de 5 rs., capital 100, mas el interés $\frac{1}{4}$ de 1 real de 5 reales.

Los 99 rs. $\frac{3}{4}$ impuestos al 5 por 100 no valdrán pues en un año mas que 99 rs. $\frac{3}{4}+\frac{99+3/4}{20}$ ó 104 rs. 7,375, de real.

Si se quisiese hallar á qué tanto por ciento deben imponerse los 99 rs. $\frac{3}{4}$ para que valgan 105 rs. en un año, se dirá: el interés de 99 rs. $\frac{3}{4}$ debe ser 105 rs.—99 reales $\frac{3}{4}$ ó 5 rs. $\frac{1}{4}$.

El interés de 1 real debe ser $\frac{5+\frac{1}{4}}{99+\frac{3}{4}}$ ó $\frac{1}{19}$.

El interés de 100 rs. será pues $\frac{100}{19}$ ó $5+\frac{5}{19}$ rs.

Por donde se vé el *descuento de interés compuesto* al 5 por 100 corresponde á un interés ordinario de $5\frac{5}{19}$ por 100.

4. Problema XVII. *¿Cuánto se ha de pagar de descuento de interés simple á razon de 6 por 100 para hacer desde luego efectivo un pagaré de 2850 rs., pagaderos en 3 años y 4 meses ó en 40 meses?*

El descuento de 100 rs. en un año siendo 6 rs.

El descuento de 1 real en un año será $\frac{6}{100}$.

El descuento de 2850 en un año será $\frac{6}{100}\times 2850$.

El descuento de 2850 en un mes será $\frac{6\times 2850}{100\times 12}$ ó $14\ \frac{1}{4}$.

El descuento de 2850 en 40 meses será $14\ \frac{1}{4}\times 40$ ó 570.

Luego se obtendrán en dinero contante 2850—570 ó 2280 rs.

Problema XVIII. *Un pagaré de 2850 rs., pagadero á 40 meses, se ha negociado por 2280 al contado. ¿Cuál ha sido el tanto por 100 de descuento?*

La diferencia entre estas dos sumas siendo 570 rs. se ve que,

El descuento de 2850 rs. es 570 rs.

El descuento de 1 real será $\frac{570}{2850}$

El descuento de 100 rs. es pues $\frac{570}{2850}\times 100$ ó 20 rs.

Así el descuento de 100 rs. en 40 meses es 20 rs. En un mes será de $\frac{20}{40}$ ó $\frac{1}{2}$ real, y en 12 meses de $\frac{12}{2}$ ó de 6 rs.

Luego el pagaré ha sido descontado á razon del 6 por 100.

Problema XIX. *Un pagaré de 2850 rs., descontado el 6 por 100, recibió 2280 al contado: ¿á qué época era pagadero el pagaré?*

El descuento del pagaré ha sido 2850—2280 ó 570 reales.

El descuento de un real por año, siendo $\frac{1}{100}$.

El descuento de 2850 por un año, es $\frac{6}{100}\times 2850$ ó sea 171 rs.

Puesto que el descuento de 171 rs. corresponde á 12 meses, el descuento de un mes corresponde á $\frac{12 \text{ meses}}{171}$.

El descuento 570 corresponde á $\frac{12 \text{ meses}}{171}\times 570$ ó á 40 meses.

De que se deduce que el pagaré se ha hecho efectivo 40 meses antes de su vencimiento.

§. VI. *Regla de interés compuesto.*

1. El interés de la suma colocada al principio de cada año se unirá á dicha suma para obtener interés durante el año siguiente.

2. Cuando el tiempo durante el cual el capital permanezca colocado se componga de un número entero de años y de un número de meses menor que 12, se tomarán primero los intereses de año en año durante el número entero de estos, y en seguida el nuevo capital que resulte se figurará colocado al interés simple durante el número de meses.

3. Para hallar cuánto valdrá un capital colocado á interés compuesto al cabo de cierto número de años, es suficiente buscar la fraccion que exprese el valor de un real al contado al fin de un año, y multiplicar el capital de la potencia de esta fraccion que denote el número de años.

Problema XX. *¿Cuánto valdrán 480000 rs. en tres años colocados al 5 por 100 de interés compuesto?*

Este problema puede resolverse de dos maneras:

1.° El interés de 480000 rs. durante el primer año al 5 por 100 es la 2.ª parte de 480000 rs. ó 24000 rs. Los 480000 reales valdrán por consiguiente al fin del primer año 480000 rs.+24000 rs. ó 504000.

Estos 504000 rs. colocados al principio del segundo año, valdrán al fin del mismo 504000, + su interés 22200 reales ó 529200 rs.

Estos 529200 colocados al principio del tercer año, valdrán al fin del mismo 529200, + su interés 26460 ó 555660 reales.

Luego los 480000 valdrán 555660 rs. en los tres años.

2.° El interés anual, siendo la 20.ª parte del capital, se obtiene lo que una suma colocada al principio de un año vale al fin del mismo, aumentando está suma con la 20.ª parte, lo que equivale á tomar los $\frac{21}{20}$.

Por consecuencia, los 480,000 rs. colocados al principio del primer año, valen al fin de este mismo año $480000 \times \frac{21}{20}$.

Esta última suma, colocada al principio del segundo año, vale al fin del mismo,

$$480000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \text{ ó } 480000 \text{ rs.} \times \left(\frac{21}{20}\right)^2$$

Finalmente, esta última suma, colocada al principio del tercer año, valdrá 480000 rs. $\times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ ó $480000 \times \left(\frac{21}{20}\right)^3$ ó 555660 rs. De que se deduce que para

obtener lo que una suma colocada al 5 por 100 de interés compuesto vale despues de cierto número de años, basta multiplicar esta suma por una potencia de $\frac{21}{20}$ que denote el número de años.

4. Para hallar lo que vale un capital colocado á interés compuesto durante cierto número de años y de meses al fin de este tiempo, se averigua desde luego cuánto valdrá el capital durante el número de años, y se multiplica esta última suma por la fraccion que exprese cuánto un real al contado vale al cabo de un número de meses dado.

Problema XXI. *¿Cuánto valdrán 480000 rs. colocados al 5 por 100 de interés compuesto en tres años y cuatro meses?*

Este problema puede resolverse de dos modos:

1.° Se hallará primero como el problema XX que 480000 rs. valen 555660 rs. al fin del tercer año, y se aumentará esta suma con un interés simple durante 4 meses.

Ahora bien: el interés de 555660 rs. en 12 meses, siendo la 20.ª parte de 555660 rs. ó 27783 rs.; el interés de 555660 en 4 meses, es el $\frac{1}{3}$ de 27783 ó 9261 rs. Añadiendo este interés á 555660 rs, se halla que 480000 rs. valdrán 564921 reales en los tres años y cuatro meses.

2.° El interés de un real en 12 meses siendo $\frac{1}{20}$.

El interés de un real en 4 meses será el $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{20}$ ó $\frac{1}{60}$.

Se obtendrá pues lo que una suma pagadera á una época dada, vale 4 meses mas tarde, añadiendo á esta suma un 60.ª parte, lo que equivale á tomar $\frac{61}{60}$.

El capital 480000 rs., que valia $480000 \times \left(\frac{21}{20}\right)^3$ al cabo de tres años (Problema XXI, 2.ª solucion), valdrá pues al cabo de tres años y cuatro meses los $\frac{61}{60}$ de 480000 reales $\times \left(\frac{21}{20}\right)^3$ ó 480000 rs. $\times \left(\frac{21}{20}\right)^3 \frac{61}{60}$ ó 480000 reales $\times \frac{564921}{480000}$ ó 564921 rs.

Problema XXII. *¿Cuánto valen al contado 564921 rs. pagaderos en tres años y cuatro meses con el descuento del 5 por 100 de interés compuesto?*

Se deduce del problema XXI que un real al contado vale $\frac{564921}{480000}$ al cabo de tres años y cuatro meses. Luego dividiendo 564921 por $\frac{564921}{480000}$, el cuociente 480000 será el número de reales del capital buscado (Problema XXI).

§. VII. *Regla de trueque ó cambio.*

1. Problema XXIII. *Se desea cambiar paño de 100 rs. metro, por raso de 50: ¿cuánto raso se ha de recibir en cambio de 300 metros de paño?*

Este problema puede resolverse de dos maneras:

1.° Los 300 metros de paño valen 300 veces 100 rs. ó 30000. Se recibirá, pues, tantos metros de raso como veces el precio 50 rs. de este género esté contenido en 30000 rs. Luego dividiendo 30000 por 50, el cuociente expresará el número de metros pedido.

2.° Un metro de paño valiendo 100 rs. y un metro de raso 50, por un real se tendrá $\frac{1}{100}$ de paño ó $\frac{1}{50}$ de raso. Un metro de paño valdrá pues 100 veces $\frac{1}{50}$ ó $\frac{50}{50}$ de raso.

$\frac{50}{25}$

Luego los 300 metros de paño recibirán 300 veces $\frac{50}{25}$ de raso ó sean 600 metros de raso.

2. Problema XXIV. *Un comerciante desea cambiar paño por cotonía: 2 metros de paño valen tanto como 3 metros de raso y 5 metros de raso tanto como 7 metros de cotonía. ¿Cuántos metros de cotonía recibirá el comerciante por 60 metros de paño?*

Segun la enunciacion del problema, diremos:

Un metro de paño vale $\frac{3}{2}$ metros de raso, y un metro de raso vale $\frac{7}{5}$ metros de cotonía: luego un metro de paño valdrá los $\frac{3}{2}$ metros de $\frac{7}{5}$ de cotonía ó $\frac{21}{20}$ de cotonía.

Los 60 metros de paño valdrán por consiguiente 60 veces $\frac{21}{20}$ de cotonía ó sea 126 metros de cotonía.

§. VIII. *Regla de aligacion ó mezcla.*

1. Para obtener el precio de una unidad de medida de una mezcla cualquiera, basta multiplicar el precio de una medida de cada especie por el número de las que contenga, y dividir la suma de estos productos por el número total de las medidas de la mezcla.

El precio de una medida de la mezcla está siempre comprendido entre el mayor y el ínfimo de una misma medida de las sustancias mezcladas.

Problema XXV. *Una mezcla se compone de 4 decalitros de vino á 14 rs. y de 6 decalitros á 24. ¿A cómo sale el decalitro de esta mezcla?*

Los 4 decalitros á 14 rs. decalitro, valen 4 veces 14 rs. ó 56 rs.

Los 6 decalitros á 24 rs. decalitro, valen 6 veces 24 rs. ó 144 rs.

Los 10 decalitros de la mezcla valdrán pues 56+144 ó 200 rs.

Luego un decalitro de la mezcla valdrá la 10.ª parte de 200 ó 20 rs.

Problema. XXVI. *¿En qué proporcion se han de mezclar vinos de 14 y 24 rs. decalitro de manera que la mezcla salga á 20 reales decalitro?*

Este problema puede resolverse de dos modos:

1.° Se toma un número arbitrario de decalitros, como por ejemplo 10 decalitros, y se dice:

Los 10 decalitros de mezcla á 20 rs. decalitro, valen 200 reales.

Luego 10 decalitros á 24 rs. costarán 240.

Necesitamos por consiguiente disminuir este último precio en 40 rs. sin cambiar el número de decalitros.

Pero por cada decalitro de vino de 24 rs., reemplazado por un decalitro de á 14, el precio 240 de los 10 decalitros disminuye en 10 rs. Obtendremos, pues, el número de decalitros de á 24 rs. que deben ser reemplazados por decalitros de á 14, dividiendo 40 por 10, lo que da por resultado 4 decalitros. Los 10 decalitros de mezcla deberán por lo tanto componerse de 4 decalitros de á 14 reales y 6 de á 24.

2.° Cada decalitro de á 14 rs. que se vendiese á 20 daria 20—14 ó 6 rs. de ganancia, y cada decalitro de á 24 que se vendiese á 20 causaria 24—20 rs., ó 4 rs. de pérdida: luego para que la ganancia compense la pérdida, basta mezclar 4 decalitros de á 14 con 6 de á 24: las 10 de mezcla saldrán á 20 reales decalitro.

2. Cuando se nos da el número total de medidas, decalitros por ejemplo que ha de contener la mezcla, nada mas fácil que hallar cuántos decalitros de cada especie debe contener. En efecto:

10 decalitros de mezcla contienen 4 decalitros de á 14 rs. y 6 decalitros de á 28.

Un decalitro de mezcla contiene $\frac{4}{10}$ decalitros de á 14 rs. y $\frac{6}{10}$ de decalitros de á 24 rs.

Luego el número de decalitros de vino de á 14 rs. son los $\frac{4}{10}$ y el número de decalitros de vino á 24 son los $\frac{6}{10}$ del número de decalitros de la mezcla.

Asi, para componer 30 decalitros de vino á 20 rs. se mezclarán 30 decalitros $\times \frac{4}{10}$ ó 12 decalitros de vino de á 14

reales con 30 decalitros $\times \frac{6}{10}$ ó 18 decalitros de vino de á 24.

3. Cuando el número de decalitros y sus precios se han fijado, nada mas fácil que averiguar el número de decalitros á cualquier otro precio.

Sea 10 el número de decalitros á 14 rs. Acabamos de ver que 10 decalitros de mezcla contienen 4 decalitros á 14 rs. y 6 decalitros á 24. Por otra parte, 6 es las $\frac{6}{4}$ ó los $\frac{3}{2}$ de 4. El número de decalitros á 24 es pues los $\frac{3}{2}$ del número de decalitros á 14.

Así, para componer vino á 20 rs. decalitro, mezclando vino de á 24 con 12 decalitros de á 14, el número de decalitros á 24 será los $\frac{3}{2}$ de 12 á 18.

§. IX. *Continúa la regla de aligacion.—Aplicacion de esta regla á las aleaciones metálicas.*

1. Llámase *aleacion* la combinacion de varios metales que se funden juntos.

2. Si consideramos el peso de los metales sin relacion á su volúmen, *el peso de una aleacion será igual al peso reunido de los metales que la compongan.*

3. Para hallar la cantidad de metal puro contenido en una aleacion cuyo *título* ó *ley* nos sea dada con relacion á este metal, es suficiente multiplicar el peso total de la aleacion por su *título* ó *ley*; y para obtener el *título* de una aleacion con relacion á uno de los metales componentes basta dividir el peso de este metal contenido en la aleacion, por el peso total de esta.

Cuando una aleacion contiene $\frac{8}{10}$ de su peso en oro puro, se dice que este oro está al título ó ley de $\frac{8}{10}$

ó á $\frac{8}{10}$ de fino. De que se deduce que una barrita de oro al título ó ley de $\frac{8}{10}$, y que pesa 5 gramos, es una aleacion de oro y otros metales que contiene las $\frac{8}{10}$ de 100 gramos ú 80 gramos de oro puro, y por consiguiente en la barrita de 5 gramos habrá 4 de oro puro y 1 de otros metales.

Una aleacion que contenga $\frac{7}{10}$ de oro puro y $\frac{3}{10}$ de plata estará al título ó ley de $\frac{7}{10}$ de fino con relacion al oro, y de $\frac{3}{10}$ de fino con relacion á la plata: 100 gramos de esta aleacion contendrán por consiguiente las $\frac{7}{10}$ de 100 gramos ó 70 gramos de oro puro y las $\frac{3}{10}$ de 100 gramos ó 30 gramos de plata pura.

Problema XXVII. *Fundiendo juntos 30 gramos de oro al título ó ley de* 0,90 *con 30 gramos de oro al título de* 0,80, *¿cuál será el título ó ley de la nueva aleacion?*

Dándonos el producto del número de gramos por su título la cantidad de oro puro, hallamos que,

70 gramos de oro al título de 0,90 contienen 63 gramos de oro puro.

30 gramos de oro al título de 0,80 contienen 24 gramos de oro puro.

100 gramos de aleacion contendrán, pues, 63+24 ú 87 gramos de oro puro.

1 gramo de aleacion contendrá por consiguiente 0 gramos, 87 de oro puro.

Luego el titulo de la aleacion será á 0,87 de fino

Problema XXVIII. *En una aleacion compuesta de 20 gramos de oro al título ó ley de* 0,05 *con 30 gramos de oro al*

de 0,10, *de* 28 *al de* 0,14, *y de* 12 *al de* 0,24, *¿á qué título ó ley se halla esta aleacion?*

20 gramos de oro al	título de 0,05	contienen	1 gramo de oro.
50 id.	id.	á 0,10 contienen	3 de id.
28 id.	id.	á 0,14 contienen	3,92 de id.
12 id.	id.	á 0,24 contienen	2,88 de id.
90 gramos de aleacion contendrán. . . .			10,80 de oro.

1 gramo de aleacion contendrá 0, gramos 12 de oro puro.

Luego el título ó ley de esta aleacion será de 0,12 de fino.

§. X. *Regla de falsa posicion.*

1. Hay problemas que no pueden resolverse por los métodos directos. Si para verificarlo tanteásemos números tomados al azar, tendriamos que hacer muchos tanteos inútiles: para cortar este inconveniente aseguramos la marcha del raciocinio por medio de suposiciones arbitrarias que nos conducen á destruir los errores del cálculo.

En estas suposiciones consiste la regla llamada de *falsa posicion.*

2. La regla de falsa posicion es sencilla ó doble.

Si solo empleamos una *falsa suposicion*, la regla se llama de *falsa posicion sencilla*; si empleamos *dos suposiciones falsas*, calificamos la regla de *doble falsa posicion.*

3. Regla de falsa posicion simple.—Problema XXIX.— *Tenemos únicamente piezas de 2 francos y 5 francos, moneda francesa, y hemos de pagar á un comerciante de esta nacion 26 francos con 10 de esas monedas: ¿cuántas le daremos de cada una?*

Si las 10 piezas fuesen de 2 francos, valdrian 20 francos en vez de 26. Por consiguiente, es necesario aumentar con 6 francos el valor de las 16 piezas, sin cambiar el número de estas. Sin embargo, cada pieza de 5 francos que sustituyamos en lugar de las de 2, aumenta en 3 francos el valor de las 10 piezas. Luego para aumentar á estas el valor de 6 francos es necesario sustituir 2 piezas de 5 francos á 2 de 2 francos, formando así los 26 francos con 8 piezas de 2 francos y 2 de 5 francos.

4. Regla de doble falsa posicion.—Problema XXX.— *Preguntado un jugador por el dinero que tenia en el bolsillo, contestó que el exceso del quíntuplo del número de sus doblones sobre 30 era igual al exceso del verdadero número de sus doblones sobre 6: ¿cuántos doblones tenia el jugador?*

Tomaremos un número arbitrario de doblones. Si este número no goza de las propiedades expresadas en el problema, producirá un error que se destruirá por medio de una segunda suposicion.

Primera suposicion.	20 doblones.
El exceso de 5 veces 20 sobre 30 es.	70
El exceso de 2 veces 20 sobre 6 es.	34
El *error* correspondiente consiste pues en. .	36
Segunda suposicion.	19 doblones.
El exceso de 5 veces 19 sobre 30 es.	65
El exceso de 5 veces 19 sobre 6 es.	32
El *error* correspondiente consiste pues en. .	33

Ahora bien: para disminuir el *error* 36 en 3, es necesario disminuir en 16 el número 20 de los doblones: y para disminuir el *error* 36 en 6, es necesario disminuir en 12 el número de los 20 doblones.

El jugador tenia, pues, 8 doblones. En efecto, el exceso del quíntuplo de 8 sobre 30 es 10, y el exceso del duplo de 8 sobre 6 es igualmente 10, como lo exige el problema.

SECCION SEGUNDA.—RAZONES Y PROPORCIONES Y SOLUCION DE VARIOS PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR SU MEDIO.

§. I. *De la razon aritmética y geométrica.*

1. Se llama *razon* en general el resultado de la comparacion de dos cantidades. Estas pueden compararse entre sí de dos maneras: ya por sustraccion ó diferencia, ya por division ó cuociente. De aquí dos clases de *razones*: *las aritméticas* y *las geométricas.*

2. *Razon aritmética* es la diferencia de dos cantidades; *razon geométrica*, el cuociente de otras dos. La primera se llama tambien *razon por diferencia*; la segunda *razon por cuociente*. Así:

La razon aritmética ó por diferencia de 18 á 6 es 18—6 ó 12, y la razon geométrica de 18 á 6 es $\frac{18}{6}$ ó 3.

3. Para escribir una razon se coloca el segundo número á continuacion del primero, separándolos con un punto si la razon es aritmética, y con dos siendo geométrica. Así:

La razon aritmética de 18 á 6 se escribe 18.6.

Y la razon geométrica de 18 á 6 se escribe 18:6.

4. Los dos números que se comparan se llaman *términos de la razon*: el primer término se denomina *antecedente* y el segundo *consecuente*.

5. Una *razon geométrica* no varía aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.

En efecto, toda razon geométrica equivale á una fraccion que tiene por antecedente el numerador, y por consecuente el denominador. Es así que el valor de una fraccion no varía aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por el mismo número, como hemos visto ya: luego la razon geométrica no variará tampoco en este caso.

§. II. *De las proporciones en general.*

1. Una *proporcion geométrica*, ó simplemente una proporcion, es la reunion de dos razones iguales. Así:

La razon de 6 á 18, siendo $\frac{6}{18}$ ó $\frac{1}{3}$, y la razon de 8 á 24, siendo $\frac{8}{24}$ ó $\frac{1}{3}$ como la primera, estas dos razones son iguales.

Tenemos, pues, $\frac{6}{18}=\frac{8}{24}$, y los cuatro números 6, 18, 8, 24 están en proporcion.

2. Se escribe una proporcion colocando dos puntos entre cada razon y cuatro entre los dos medios. Ejemplo:

$$6 : 18 :: 8 : 24,$$

lo que se enuncia así: 6 *es* á 18 *como* 8 *es* á 24.

3. El primero y cuarto término se llaman *extremos;* el segundo y tercero, *medios.*

Se llaman primer *antecedente* y primer *consecuente*, los dos términos de la primera razon; segundo *antecedente* y segundo *consecuente*, los dos términos de la segunda.

4. La propiedad fundamental de toda proporcion geométrica, es que el *producto de los extremos sea igual al producto de los medios.*

Sea la proporcion $6 : 18 :: 8 : 24$.

El producto de 6 por 24 es 144; y el producto de 18 por 8 es tambien 144: luego tendremos $6\times24=18\times8$.

Y en efecto, las razones iguales de la proporcion dan las fracciones iguales $\frac{6}{18}$ y $\frac{8}{24}$: luego tendremos $\frac{6}{18}=\frac{8}{24}$.

La reduccion á un mismo denominador da $\frac{6\times24}{18\times24}=\frac{8\times18}{24\times18}$. Estas fracciones son iguales, porque tienen el mismo denominador, y son iguales sus numeradores; luego:

$$6\times24=18\times8:$$

Luego *el producto de los extremos, igual al producto de los medios.*

5. Cuando el producto de dos números es igual al producto de otros dos, podemos con estos cuatro números formar una proporcion, tomando los dos factores de uno de los productos por extremos, y los otros dos factores por medios.

Sea $7\times12=28\times3=84$. Podremos formar la proporcion $7 : 3 :: 28 : 12$.

En efecto, si dividimos los productos iguales 7×12 y 28×3 por 3×12, los cuocientes $\frac{7\times12}{3\times12}$ y $\frac{28\times3}{3\times12}$ serán iguales: luego suprimiendo el factor 32, comun á los dos términos de la primera fraccion, y el factor 3, comun á los términos de la segunda, obtendremos las fracciones equivalentes

$\frac{7}{13}$ y $\frac{28}{12}$; y siendo iguales estas dos razones tendremos la proporcion

$$7 : 3 :: 28 : 12.$$

6. Cuando cuatro números no están en proporcion, el producto de los extremos no es igual al de los medios.

En efecto, si estos productos fuesen iguales, los cuatro números dados formarian una proporcion, lo que seria contrario á la hipótesis.

7. Cada extremo de una proporcion es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

Sea la proporcion $7 : 3 :: 23 : 12$.

Esta proporcion da $7\times12=3\times28$: si dividimos por 7 los dos productos iguales 7×12 y 3×28, los resultados $\frac{7\times12}{7}$ y $\frac{3\times28}{7}$, ó lo que es lo mismo, 12 y $\frac{3\times28}{7}$, serán iguales. Por consiguiente, el extremo 12 es igual al producto de los medios 3×28 dividido por el otro extremo 7. Lo que demuestra el principio enunciado.

Del mismo modo probariamos que $7=\frac{3\times28}{12}$.

Cada medio de una proporcion es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Sea la proporcion $7 : 3 :: 28 : 12$.

Esta proporcion da 7×12 y 3×28. Si dividimos por 3 los dos productos iguales 7×12 y 3×28, los resultados $\frac{7\times12}{3}$ y $\frac{28\times3}{3}$ ó 28 serán iguales.

Luego el medio 28 es igual al producto de los extremos 7×12, y dividido por el otro medio 3, lo que demuestra el principio enunciado.

Del mismo modo probariamos que el medio $3=\frac{7\times12}{28}$.

De lo dicho se infiere que, conocidos los tres términos de una proporcion, podemos averiguar siempre el cuarto término. Ejemplo:

Sea hallar el cuarto término de la proporcion cuyos tres primeros son 6, 2 y 24.

Designado el término desconocido por x, tendremos:

$6 : 2 :: 24 : x$, de donde se deduce que $x = \dfrac{2 \times 24}{6} = 8$.

La proporcion completa será pues, $6 : 2 :: 24 : 8$.

8. Una proporcion puede sufrir tantas trasformaciones como combinaciones se puedan hacer con sus términos sin alterar la igualdad entre el producto de los extremos y el de los medios. Estas trasformaciones son 8. Ejemplo:

La proporcion $7 : 3 :: 28 : 12$, dando $7 \times 12 = 3 \times 28$, los números 7, 3, 28, 12, nos darán las ocho proporciones siguientes:

7 : 3 :: 28 : 12,	proporcion primitiva.
7 : 28 :: 3 : 12,	proporcion en que los medios cambian de lugar.
12 : 3 :: 28 : 7,	proporcion en que los extremos han cambiado de lugar.
12 : 27 :: 3 : 7,	proporcion en que los medios y los extremos han cambiado de lugar.
3 : 7 :: 12 : 28,	proporcion en que los medios han tomado el lugar de los extremos.
3 : 12 :: 7 : 28,	proporcion en que los medios, habiendo tomado el lugar de los extremos, estos variaron tambien de lugar.
28 : 7 :: 12 : 3,	proporcion en que los extremos, habiendo tomado el lugar de los medios, estos han variado tambien de lugar.
28 : 12 :: 7 : 3,	proporcion en que los extremos, habiendo tomado el lugar de los medios, los extremos han variado tambien de lugar.

9. Una proporcion no se altera aunque se multipliquen ó se partan por un mismo número sus dos antecedentes ó sus dos consecuentes, ó sus cuatro términos á la vez. Podemos, pues, practicar estas operaciones sin destruir la proporcion.

En efecto, multiplicar ó dividir por un mismo número

los dos antecedentes de una proporcion, es multiplicar ó dividir por el mismo número las dos razones ó las dos fracciones á quienes dichos antecedentes sirven de numeradores.

Mas dos fracciones iguales, multiplicadas ó divididas por un mismo número, permanecen siempre iguales. Luego despues de la multiplicacion ó division de los antecedentes por un mismo número, las razones permanecerán iguales y la proporcion primitiva no se habrá destruido.

Lo mismo probaríamos que la multiplicacion ó division de los dos consecuentes ó de los cuatro términos á la vez, por un mismo número, en nada alteraria la proporcion.

10. Se hace aplicacion de esta propiedad para eliminar de una proporcion los números fraccionarios, ó para simplificar sus términos cuando se halla algun factor comun entre un extremo y un medio. Ejemplo:

Sea la proporcion $\dfrac{2}{3} : \dfrac{500}{7} :: 4 : \dfrac{3000}{7}$.

Para eliminar los denominadores 3 y 7, se multiplican sucesivamente los dos términos $\dfrac{2}{3}$ y 4 por 3 y los dos términos $\dfrac{500}{7}$ y $\dfrac{3000}{7}$ por 7, lo que nos da la nueva proporcion $\dfrac{2 \times 3}{3} : \dfrac{500 \times 7}{7} :: 4 \times 3 : \dfrac{3000 \times 7}{7}$ ó $2 : 500 :: 12 : 3000$.

Podemos aun simplificar esta última proporcion dividiendo por 100 los términos 500 y 300, lo que da la proporcion $2 : 5 :: 12 : 30$.

11. Una razon compuesta es la que resulta de multiplicar entre sí los antecedentes y consecuentes de otras varias. Así:

La razon compuesta de dos razones $7 : 12$ y $3 : 28$ es:

$$7 \times 3 : 12 \times 28 \text{ ó } 21 : 336.$$

La razon de 7 á 12 es $\dfrac{7}{12}$; la de 3 á 28 es $\dfrac{3}{28}$. La razon de 24 á 336 es pues el producto de $\frac{7}{12}$ por $\frac{3}{28}$ ó $\frac{21}{336}$ ó $\frac{7}{112}$ ó $\frac{1}{16}$.

12. Multiplicando los términos de varias proporciones los unos por los otros y por órden, los cuatro productos forman una nueva proporcion.

En efecto: sean las 3 proporciones:

$$3 : 6 :: 4 : 8$$
$$5 : 7 :: 20 : 28$$
$$2 : 11 :: 8 : 44$$

Multiplicadas por órden tendremos:

$$3\times5\times2\times6\times7 : 11 :: 4\times20\times8 : 8\times28\times44,$$
$$ó\ 30 : 462 :: 640 : 9944.$$

Efectivamente, tenemos las razones $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$, $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$, $\frac{2}{11}=\frac{3}{44}$. Por consiguiente es evidente que los productos de las tres primeras razones es igual al de las otras tres, lo que da:

$$\frac{3\times5\times2}{6\times7\times11}=\frac{4\times20\times8}{8\times28\times44}\ ó\ \frac{30}{462}=\frac{640}{9944}.$$

Ultima igualdad que nos da la proporcion 30 : 462 : : 640 : 9944.

13. Cuando dos proporciones tienen los mismos antecedentes y los mismos consecuentes, los otros cuatro términos forman una proporcion.

Sean las dos proporciones:

$$5 : 15 :: 7 : 21 \text{ y } 5 : 10 :: 7 : 14.$$

Tendremos tambien que 15 : 21 : : 10 : 14.

En efecto, si se cambian los medios en ambas proporciones tendremos

$$5 : 7 :: 15 : 21 \text{ y } 5 : 7 :: 10 : 14.$$

Luego si estas dos proporciones tienen una razon comun $\frac{5}{7}$, las otras dos razones $\frac{5}{21}$ y $\frac{10}{14}$ deben ser iguales, y por consiguiente nos dan la proporcion 15 : 21 : : 10 : 14.

§. III. *De la regla de tres en general.*

1. La *regla de tres* es la que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporcion, cuyos otros tres términos nos han sido dados.

2. La enunciacion de una regla de tres debe encerrar por lo menos dos cantidades homogéneas. La tercera ha de ser siempre homogénea con la cuarta buscada. Así en el problema:

Un metro de paño ha costado 100 rs.: ¿cuánto importarán 3? 1 y 3 representan metros: 100 y el número desconocido, representan reales.

3. Llámanse *cantidades principales* á las dos conocidas y *cantidades relativas* á las otras dos de la misma especie, una de las cuales es desconocida. Así en el ejemplo anterior:

1 y 3 son cantidades principales: 100 y el número desconocido son cantidades relativas. Así 100 rs. es la relativa de la principal un metro, y x la relativa de la principal 3 metros, que es el número de reales que han de costar los 3 metros de paño.

4. La *regla de tres es directa* cuando las cantidades relativas aumentan ó disminuyen con las principales, y entonces se dice que estas cantidades son *directamente proporcionales.*

La *regla de tres es inversa*, si las cantidades relativas disminuyen cuando las principales aumentan, ó aumentan cuando estas disminuyen, y entonces se dice que estas cantidades son *recíprocamente proporcionales.*

§. IV. *Regla de tres simple, directa é inversa.*

1. La *regla de tres simple*, se llama así porque solo entran tres números en la manifestacion del problema.

La *regla de tres simple* es de dos especies: *directa*, si las dos razones son directas; *inversa*, si ambas razones son inversas.

Problema I. *Cuatro canteros hicieron 20 metros cúbicos de pared: ¿nueve canteros cuántos harán?*

La cantidad de obra hecha en iguales circunstancias por los canteros, es evidentemente proporcional al número de estos, es decir, que cuantos mas canteros haya, mas obra ó pared harán. Por consiguiente esta regla de tres es directa, y el primer número de canteros es al segundo como el número de metros cúbicos de pared hecha es al número desconocido de metros cúbicos de pared hecha por los segundos: designando, pues, por x el número desconocido de metros cúbicos, tendremos la proporcion:

$$4 : 5 :: 20 : x, \text{ de donde se deduce } x = \frac{20 \times 5}{4} = 45 \text{ metros}$$

cúbicos (1).

2. Solo puede establecerse una razon entre cantidades de una misma naturaleza (2). Esta razon es un número abstracto que indica el cuociente de la division de una de estas cantidades por la otra.

3. Para establecer una proporcion entre una razon directa y su inversa correspondiente, basta con cambiar los términos de una de ambas razones é igualar en seguida la nueva razon con la otra.

Problema II. *Tres obreros hicieron una obra en 15 horas: ¿cuántas horas necesitarán 5 obreros para hacer la misma obra?*

El tiempo empleado por los obreros en hacer la obra, es tanto *mayor* cuanto *menor* sea el número de ellos, es decir, que cuantos *menos* obreros haya, *mas* tiempo emplearán. Por consiguiente esta regla de tres es inversa. Para pasar de una razon inversa á su directa correspondiente, es necesario cambiar los términos de la razon de los obreros, dejando la segunda razon de los dias tal cual es. Así:

La proporcion $3 : 5 :: 15 : x$, se convierte en $5 : 3 :: 15 : x$, de donde:

$$x = \frac{3 \times 15}{5} = 9 \text{ horas (Problema VI.)}$$

(1) El raciocinio empleado (problema IV), nos ha conducido al mismo resultado.

(2) Nunca siendo de naturaleza distinta.

§. V. *Regla de tres compuesta.*

1. La *regla de tres compuesta* se llama así porque la razon de la cantidad buscada á la cantidad de la misma especie depende de mas de dos razones simples.

La *regla de tres compuesta* es de tres especies: *directa*, si sus razones son directas; *inversa*, si son inversas; *directa é inversa*, si son á la par directas é inversas.

2. **Problema III.** *Dos obreros trabajando tres horas por dia, hicieron 90 kilómetros de labor en 5 dias: ¿cuántos kilómetros harán 3 obreros en 2 dias trabajando 7 horas cada dia?*

Este problema puede resolverse de dos modos:

1.° Tomando sucesivamente en consideracion los obreros, las horas y los dias, lo que conduce á resolver las tres cuestiones siguientes:

Primera cuestion. *Dos obreros trabajando 3 horas por dia hacen 90 kilómetros de labor en 5 dias: ¡cuánto harán 3 obreros trabajando las mismas 3 horas por dia en los mismos 5 dias?*

Puesto que el número de horas y dias no varían, diremos:

2 obreros han hecho 90 kilómetros: 3 obreros ¿cuántos harán? El número de kilómetros buscado es el cuarto término de la proporcion.

$$2 : 3 :: 90 : x, \text{ de donde } x = \frac{90 \times 3}{2} = 135 \text{ kilómetros.}$$

Por consiguiente, 3 obreros trabajando 3 horas por dia, en 5 dias hacen 135 kilómetros.

Segunda cuestion. *Tres obreros trabajando 3 horas por dia durante 5 dias hacen 135 kilómetros de labor: ¿cuánto harán los mismos 3 obreros en los mismos 5 dias trabajando 7 horas cada dia?*

Puesto que ni el número de obreros ni el de dias varía, diremos:

Trabajando 3 horas por dia hicieron 135: trabajando 7 horas ¿cuánto harán? El número de kilómetros buscado es el cuarto término de la proporcion:

$$3:7::135:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{135\times7}{3}=315\ \text{kilómetros.}$$

Luego 3 obreros trajando 7 horas por dia durante 5 dias hacen 315 kilómetros.

Tercera cuestion. *Tres obreros trabajando 7 horas por dia durante 5 dias hacen 315 kilómetros: ¿cuánto harán los mismos 3 obreros trabajando las mismas 7 horas por dia, en 2 dias?*

Puesto que el número de los obreros y de las horas es uno mismo, diremos:

En 5 dias hicieron 315 kilómetros: en 2 dias ¿cuántas harán? El número de kilómetros buscado es el cuarto término de la proporcion:

$$5:2::315:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{2\times315}{5}=126\ \text{kilómetros.}$$

Por consiguiente, tres obreros trabajando 7 horas por dia hicieron en 2 dias 126 kilómetros, como hemos visto (pág. 96.)

Podemos simplificar los cálculos anteriores despreciando las partes idénticas de los enunciados sucesivos, y presentando solo indicadas las multiplicaciones y divisiones, porque sucede con frecuencia poder suprimir algunos factores comunes á los dos términos de la fraccion. Ejemplo:

Primera cuestion. *Dos obreros hacen 90 kilómetros: ¿3 cuántos harán?*

$$2:3::9:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{90\times3}{2}.$$

Segunda cuestion. *En 3 horas hicieron* $\frac{90\times3}{2}$ *en 7 horas ¿cuánto harán?*

$$3:7::\frac{90\times3}{2}:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{90\times3\times7}{2\times3}.$$

Tercera cuestion. *En 5 dias hicieron* $\frac{90\times3\times7}{2\times3}$ *¿cuánto harán en 2 dias?*

$$5:3::\frac{90\times3\times7}{2\times3}:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{90\times3\times7\times2}{2\times3\times5}$$

Y suprimiendo los factores 2 y 3, comunes á los dos términos de esta última fraccion, y dividiendo 90×7, ó 630 por 5, hallaremos que el número de kilómetros buscado es 126.

2.° Reduciendo el problema á la solucion de una regla de tres simple:

En efecto, 2 obreros trabajando 3 horas hacen tanta labor como 1 obrero que trabajase 2 veces 3 horas; pero 1 obrero que trabajase 2 veces 3 horas por dia durante 5 dias, habrá trabajado durante 2 veces 3 horas multiplicado por 5, es decir, durante $2\times3\times5$. Luego los 2 obreros trabajando 3 horas por dia durante 5 dias hacen tanto como un obrero que trabajase solo durante $2\times7\times5$ ó 30 horas.

De la misma manera probariamos que 3 obreros trabajando 7 horas por dia durante 2 dias hacen tanto como 1 obrero que trabajase solo durante $2\times7\times2$ ó 42 horas. El problema se halla, pues, reducido al siguiente:

Un obrero ha ocupado 30 horas en hacer 90 kilómetros de labor: ¿cuántos hará en 42 horas?

El número de kilómetros buscado es el cuarto término de la proporcion.

$$30:42::90:x,\ \text{de donde}\ x=\frac{42\times90}{30}=126\ \text{kilómetros.}$$

PROBLEMA IV. *Dos obreros trabajando 3 horas por dia hicieron 90 kilómetros de labor en 5 dias: ¿cuántos dias necesitarán 3 obreros trabajando 7 horas cada dia para hacer la misma labor?*

Empleando los raciocinios precedentes, hallaríamos por medio de dos reglas de tres directas:

Que 3 obreros trabajando 3 horas por dia durante 5 dias hacen 135 kilómetros,

Que 3 obreros trabajando 7 horas por dia durante 5 dias hacen 315 kilómetros.

De lo cual deduciriamos

Cuántos dias ocuparian 3 obreros trabajando 7 horas por dia en hacer 126.

Observaremos tambien que, siendo uno mismo el número de los obreros y de los dias, basta resolver esta cuestion:

Unos obreros hicieron 315 kilómetros en 5 dias: ¿cuántos dias necesitarán los mismos obreros para hacer 126 kilómetros?

El número de dias buscado será el cuarto término de esta proporcion:

$$315 : 126 :: 5 : x, \text{ de donde } x = \frac{126 \times 5}{315} = 2 \text{ dias.}$$

Los 3 obreros trabajando 7 horas por dia tardarán por consiguiente 2 en hacer los 126 kilómetros.

3. Problema V. *Dos obreros hacen 8 kilómetros de labor: ¿cuántos kilómetros de la misma labor harán 5 obreros siendo la dificultad de la 1.ª labor á la de la 2.ª como 3 es á 4?*

Buscaremos primero cuánto harian de la primer labor 5 obreros por medio de la proporcion:

$$2 : 5 :: 8 : x, \text{ de donde } x = \frac{5 \times 8}{2} = 20 \text{ kilómetros.}$$

Los 5 obreros, haciendo 20 kilómetros de la primer labor, necesitamos deducir cuántos harán de la segunda.

Ahora bien: las dificultades de ambas obras, siendo como 3 es á 4, los kilómetros ejecutados por los obreros estarán en razon inversa de 3 á 4, es decir, :: 4 : 3; el número de kilómetros de la segunda labor hecha por los 5 obreros será el cuarto término de esta proporcion:

$$4 : 3 :: 20 : x, \text{ donde } x = \frac{3 \times 20}{4} = 15 \text{ kilómetros.}$$

Este problema nos ofrece el ejemplo de una regla de tres compuesta directa é inversa, porque depende de otras varias reglas de tres directas é inversas.

§. VI. *Regla de compañía y de sociedad.*

1. La regla de compañía ó de sociedad presenta dos casos: aquel en que los capitales están colocados durante el mismo tiempo, y el en que están colocados por tiempos diferentes.

2. Cuando los capitales están colocados durante un mismo tiempo, las ganancias ó pérdidas son directamente proporcionales á estos capitales. Por tanto, la ganancia ó la pérdida de cada sócio nos la dará una regla de tres simple y directa.

3. La ganancia ó la pérdida de cada sócio es igual á la ganancia ó pérdida total multiplicada por el capital del sócio y dividida por el capital total.

Problema VI. *Los capitales de tres sócios son 300 pesos fuertes, 500 ps. fs. y 700 ps. fs. La ganancia total es 4500 pesos fuertes. ¿Cuál es la ganancia de cada sócio?*

El capital total es 1500 pesos fuertes y la ganancia total 4500.

Por consiguiente las ganancias deben ser proporcionales á los capitales, y las ganancias ó pérdidas dependen de las proporciones:

$$1500 : 300 :: 4500 : x; \text{ de donde } x = \frac{300 \times 4500}{1500} = 900 \text{ ps. fs. } (\textit{primer sócio.})$$

$$1500 : 500 :: 4500 : x; \text{ de donde } x = \frac{500 \times 4500}{1500} = 1500 \text{ ps. fs. } (\textit{segundo sócio.})$$

$$1500 : 700 :: 4500 : x; \text{ de donde } x = \frac{700 \times 4500}{1500} = 2100 \text{ ps. fs. } (\textit{tercer sócio.})$$

$$\overline{4500} \text{ ganancia total.}$$

4. Cuando los capitales están colocados durante tiempos diferentes, las ganancias y las pérdidas están en razon compuesta de los capitales y el tiempo porque han permanecido en la sociedad.

Problema VII. *Los capitales de 3 sócios son 100 pesos fuertes, 250 ps. y 50: el primer capital permaneció 3 meses en la sociedad, el segundo 2 y el tercero 14. La ganancia total es 4500 rs.: ¿cuál es la ganancia relativa de cada sócio?*

La ganancia de cada sócio está en razon compuesta del capital y del tiempo que ha permanecido en la sociedad. El raciocinio empleado en el problema X (pág. 97) hace ver que las ganancias son iguales á las del caso anterior.

§. VII. *Regla de interés.*

Regla de interés simple.

1. La solucion de los problemas de interés pueden deducirse de los dos principios siguientes:

1.° En tiempos iguales, el interés es proporcional al capital.

2.° El interés simple de un capital es proporcional al tiempo porque este capital ha sido impuesto.

2. Cuando se nos da el capital y el tanto por ciento, para hallar el interés necesitamos, si el capital está colocado durante un año, multiplicar este capital por el tanto por ciento y separar dos cifras á la derecha del producto; y si el capital está colocado por un tiempo cualquiera, multiplicaremos á la vez el capital por el tanto por ciento y por el tiempo, y dividiremos el producto por 100, por 1200 ó por 36000, segun que el tiempo esté expresado en años, meses ó dias.

Problema VIII. *¿Cuál es el interés del 5 por 100 de 480000 rs. en 3 años?*

El interés simple, siendo proporcional al capital, tendremos la proporcion:

$$100 : 480000 :: 5 : x; \text{ de donde } x = \frac{480000 \times 5}{100},$$ capital de 480000 rs. en un año. Por consiguiente en tres años será de

$$\frac{480000 \times 5 \times 3}{100} \text{ ó } \frac{7200000}{100} \text{ ó } 72000 \text{ reales.}$$

Problema IX. *¿Cuál es el interés de 5 por 100 de 480000 reales en 3 años y 4 meses ó 40 meses?*

Hemos visto en el problema precedente que el interés de 480000 rs. es 72000 rs. en un año ó en 12 meses. Ahora bien: el interés simple de un capital es directamente proporcional al tiempo porque ha sido impuesto: tendremos, pues, la proporcion:

$$12 : 40 :: \frac{480000 \times 5}{100} : x; \text{ de donde } x = \frac{480000 \times 5 \times 40}{100 \times 12} = \frac{96000000}{1200} = 80000 \text{ rs.}$$

Problema X. *¿Cuál es el interés del 5 por 100 de 480000 reales en 3 años, 4 meses y 20 dias?*

Reducido el tiempo á dias, tendremos 1220 dias, y segun los principios sentados en el problema anterior plantearemos la proporcion.

$$360 : 1220 :: \frac{480000 \times 5}{100} : x; \text{ de donde } x = \frac{1220 \times 480000 \times 5}{100 \times 3600} = \frac{2933000000}{36000} = 81333\,\frac{3}{9} \text{ reales.}$$

3. De los tres problemas precedentes se deduce la regla práctica que hemos dado, pues en el primero vemos que la solucion está reducida á multiplicar el capital por el tanto por ciento y dividir el producto por 100, lo que se consigue con separar las dos últimas cifras del producto, segun digimos; y en los otros dos á multiplicar el capital por el tanto por ciento y por el tiempo de la imposicion reducido á su especie inferior, y dividirle por 1200 si el tiempo está expresado en meses, y por 36000 si en dias.

4. Dados el capital, el tiempo y los intereses, para hallar el tanto por ciento multiplicaremos los intereses por 100 si el tiempo fuere 1 año, por 1200 si fuere un número de meses, y por 36000 si fuere de dias, y dividiremos el producto por el capital multiplicado por el tiempo: el cuociente será el tanto por ciento buscado.

Problema XI. *Un capital de 480000 rs. gana de interés simple en 40 meses 80000 rs.: ¿á qué tanto por ciento estaba impuesto?*

Si 480000 rs. ganan en 40 meses 80000 rs., 100 rs. ¿cuánto ganarán en 12 meses?

Cuya cuestion da la proporcion siguiente:

$$480000 \times 40 : 80000 :: 100 \times 12 : x; \text{ de donde } x = \frac{80000 \times 100 \times 12}{480000 \times 40} = \frac{96000000}{19200000} = 5 \text{ por } 100.$$

El resultado de este problema demuestra la regla práctica que hemos dado, pues en él vemos los intereses multiplicados por 100×12 ó por 1200, y su producto dividido por el capital 480000×40, ó el tiempo de la imposicion, cuyo cuociente 5 expresa el tanto por ciento buscado.

5. Dados el capital, el tanto por ciento y los intereses, hallaremos el tiempo de la imposicion multiplicando los intereses dados por 12, y dividiendo el producto por los intereses de un año, el cuociente nos dará el tiempo buscado.

PROBLEMA XII. *¿En cuánto tiempo el capital 480000 rs. dado al 5 por 100 redituará 80000 reales?*

El interés de 480000 rs. al 5 por 100 durante un año es la 20.ª parte de 480000 ó 24000 rs.: ¿cuánto tiempo será necesario para obtener 80000?

Esta cuestion nos da la proporcion siguiente:

$$24000 : 80000 :: 12 : x\text{; de donde } x = \frac{80000\times12}{24000} =$$

$$\frac{960000}{24000} = \frac{960}{24} = 40 \text{ meses ó 3 años y 4 meses.}$$

De cuya solucion se deduce la regla dada, pues multiplicamos 80000, que son los intereses dados, por 12, cuyo producto le dividimos por los intereses de un año ó de 12 meses, expresando el cuociente el tiempo buscado. Del mismo modo hallariamos este dividiendo el interés dado por el interés de un año; pero entonces el cuociente expresaria años ó fracciones de años. Si multiplicásemos el interés dado por 360, el cuociente que resultaria de dividir el producto por el interés de un año serian dias.

6. Dados el tiempo, el interés y el tanto por ciento, hallaremos el capital multiplicando los intereses dados por 100 si el tiempo está expresado en años, por 1260 si está expresado en meses, y por 36000 si en dias; y dividiendo el producto por el tiempo, multiplicado por el tanto por ciento, el cuociente nos dará el capital buscado.

PROBLEMA XIII. *Un capital ha redituado en 40 meses 80000 rs. al 5 por 100: ¿cuál es este capital?*

En 12 meses 100 rs. ganan 5: ¿cuánto ganarán en 40 meses?

Cuya cuestion nos da la proporcion siguiente:

$$12 : 40 :: 5 : x\text{; de donde } x = \frac{40\times5}{12}.$$

Si $\frac{40\times5}{12}$ son los intereses de 100 en 40 meses, ¿de qué capital serán los intereses 80000 rs. en el mismo tiempo?

$$\frac{40\times5}{12} : 100 :: 80000 : x\text{; de donde } x = \frac{80000\times100\times12}{40\times5} =$$

$$\frac{960000}{2} = 480000 \text{ rs.}$$

De la solucion de este problema se deduce fácilmente la regla dada para resolver los demás de esta clase.

2. Regla de descuento.

1. Para hallar el descuento del interés simple de un pagaré pagadero á cierto tiempo, y el valor efectivo de otro pagaré, multiplicaremos el valor del pagaré por el tiempo de su vencimiento y el tanto por ciento de descuento anual, cuyo producto dividido por 100, si el tiempo se expresa en años, por 1200 si en meses, y por 36000 si en dias, nos dará un cuociente, que será el descuento buscado, el cual, restado del valor inscrito en el pagaré, nos demostrará el valor en efectivo de dicho pagaré.

PROBLEMA XIV. *¿Cuánto descontaremos á razon del 6 por 100 de un pagaré de 2850 rs. pagadero en 40 meses que se quiere hacer efectivo en el acto?*

SOLUCION. El descuento de una suma, siendo proporcional al valor de esta suma y al tiempo por el cual se saca el descuento, diremos:

El descuento de 100 rs. en un año, siendo 6 el de 2850 en el mismo tiempo, ¿cuánto será? Lo que averiguaremos por la proporcion:

$$100 : 2850 :: 6 : x\text{; de donde } x = \frac{2850\times6}{100}.$$

De aquí deduciremos el descuento de la misma suma en 40 meses por la proporcion:

$$12 : 40 :: \frac{2850\times6}{100} : x;\text{ de donde } x=\frac{40\times2850\times6}{100\times12}=570\text{ rs.},$$

descuento buscado que se restará de la suma inscrita en el pagaré, siendo el valor efectivo del pagaré.

$$2850-570=2280\text{ reales.}$$

La regla práctica que hemos dado para la solucion de esta clase de problemas se deduce naturalmente de la solucion del anterior.

3. Regla de interés compuesto.

1. Problema XV. *¿Cuánto valdrán 480000 rs. en 3 años al 5 por 100 capitalizando cada año los intereses, esto es, teniendo en cuenta el interés compuesto de año en año?*

Siendo 5 rs. el interés anual de 100 rs., vemos que 100 reales valen 105 reales en un año.

Por consiguiente obtendremos el valor del capital primitivo 480000 rs. por la proporcion:

$$100 : 105 : : 480000 : x;\text{ de donde } x=\frac{105\times480000}{100}=$$

504000 reales (segundo capital.)

El valor de 504000 rs. al fin del 2.° año nos lo dará la proporcion:

$$100 : 105 : : 529200 : x;\text{ de donde } x=\frac{105\times504000}{100}=$$

529200 rs. (tercer capital.)

El valor de 529200 al fin del tercer año nos lo dará la proporcion:

$$100 : 105 : : 504000 : x;\text{ de donde } x=\frac{105\times529200}{100}=$$

555660 (cuarto capital.)

Luego 480000 valdrian 555660 rs. en tres años:

Y el *interés compuesto* de 480000 rs. en tres años será:

$$555660\text{ rs.}-480000\text{ rs.}=75660\text{ reales.}$$

Problema XVI. *¿Cuánto valdrán 480000 rs. en tres años y 4 meses capitalizando cada año los intereses?*

Hallaremos primero, como en el anterior problema, que 480000 rs. valen 555660 rs. al fin del tercer año.

Hecho lo cual aumentaremos esta suma en su interés simple durante 4 meses, lo que se reduce á buscar cuánto valdrán los intereses de 555660 rs. en 4 meses.

Ahora bien: siendo 5 rs. el interés de 100 rs. en 12 meses, hallaremos el de los mismos 100 rs. en 4 meses por la proporcion siguiente:

$$12 : 4 : : 5 : x;\text{ de donde } x=\frac{4\times5}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}.$$

De que resulta que 100 rs. al contado valieron al cabo de 4 meses $100\times\frac{5}{3}$ ó $\frac{105}{3}$.

Por consiguiente, hallaremos el valor de los 555660 rs. de los 4 meses por la proporcion:

$$100 : 555660 :: \frac{105}{3} : x;\text{ de donde } x=\frac{555660\times105}{100\times3}=$$

564921 rs.

Luego 480000 rs. valdrán 564921 rs. en 3 años y 4 meses.

§. VIII. *Reglas de cambio, aligacion y falsa posicion.*

1. Problema XVII. *Se desea cambiar paño de 100 rs. metro por raso de á 50 rs. ¿Cuánto se habrá de recibir de raso por 300 metros de paño?*

Este problema puede traducirse así: 300 metros de paño, á 100 rs. metro, ¿cuántos valdrán de raso á 50?

Ahora bien: cuanto mas caro sea el raso, menos metros se necesitarán para el cambio: luego la regla de tres es inversa, y nos dará la proporcion:

$$50 : 100 : : 300 : x;\text{ de donde } x=\frac{100\times300}{50}=\frac{30000}{50}=600$$

metros de raso.

Por consiguiente deberán recibirse 600 metros de raso de á 50 rs., por 300 metros de paño de 100 reales metro.

2. PROBLEMA XVIII. *Mezclando 4 decalitros de vino de á 14 rs. con 6 decalitros de á 24, ¿á cómo sale la mezcla?*

Cuatro decalitros á 14 rs. valen 56 rs., y 6 decalitros á 24 valen 144; y componiéndose la mezcla de 10 decalitros, tendremos la proporcion:

$$10 : 56+144 :: 1 : x; \text{ de donde } x = \frac{1 \times 56 \times 144}{10} = \frac{200}{10} =$$

20 rs. decalitro.

3. PROBLEMA XIX. *Un padre dejó á su hija Isabel la tercera parte de su dinero, á su hija Micaela la cuarta, y á su hijo Jaime la quinta; la suma de estas partes asciende á 9400 pesos fuertes: ¿cuánto dinero tenia?*

Supongamos que el dinero era 60 pesos: su tercera parte seria 20, la cuarta 15 y la quinta 12, cuyas partidas ascienden á 47 pesos. Lo que nos daria la proporcion:

$$47 : 60 :: 9400 : x; \text{ de donde } x = \frac{60 \times 9400}{47} = \frac{564000}{47} = 12000$$

pesos fuertes.

METODO

PARA LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA.

El hombre ve por doquiera la unidad y la pluralidad, de donde nace la necesidad de ocuparse del número desde los primeros años de la vida.—Aunque la nocion del número nace de la contemplacion de los objetos, parece que de esta nocion se desprenden naturalmente las mas fáciles abstracciones. De aqui que el estudio de la aritmética contribuya en gran manera al desarrollo intelectual, prescindiendo de la gran utilidad que en sí mismo tiene. Contribuye ademas el estudio de la aritmética á la educacion moral, puesto que da orígen al hábito del cálculo, tan necesario para conducirnos acertadamente en los negocios y obrar siempre con una prudente economía, nivelando los gastos con los ingresos. Al efecto, conviene que el maestro proponga á los discípulos problemas que se rocen con la economía doméstica y rural. Tambien conviene hacerles calcular los tristes resultados que producen los vicios mirados bajo el aspecto económico. Dígaseles, por ejemplo: Un padre de familia que tiene por costumbre concurrir al juego ó á la taberna, gastando diariamente en este vicio 10 rs. en el primer año, 20 en el segundo y 30 en el tercero, ¿cuánto capital ha malgastado durante los tres años? Con este motivo puede el maestro hacer resaltar todos los contratiempos y disgustos que proporciona la falta de medios para cubrir las primeras necesidades.

Por lo que hace al método, hé aquí lo que dijimos en otra ocasion, y que ahora repetimos:

«La aritmética, segun Pestalozzi, se funda precisamente en la simple reunion ó separacion de unidades. La fórmula fundamental es esta: *una y una son dos; sustrayendo una de dos, queda una.* En tal concepto, es de suma importancia que esta primera base de todo número y de toda operacion numérica, no se confunda y desaparezca de la mente del niño.

La ciencia de los números se debe enseñar de modo que su primitiva formacion quede profundamente grabada en el ánimo, y dé un conocimiento claro é intuitivo de sus propiedades reales. Las primeras impresiones de las proporciones numéricas deben darse á los niños presentando á la vista las variaciones del mas ó menos por medio de objetos materiales. De aquí la utilidad del tablero contador de que luego hablaremos. En efecto, se presenta á un niño una bola, y se le pregunta: ¿hay aqui muchas bolas?—No, no hay mas que una. Continúa el maestro ó instructor: ¿una y una cuántas son?—Una y una son dos. De este modo va añadiendo al principio una á una, dos á dos, tres á tres, etc., hasta que los niños hayan llegado de este modo á comprender bien la reunion de unidades hasta diez ó la decena. Familiarizado ya el niño con este ejercicio, y cuando sabe contar ya, no solo las bolas del tablero, sino los niños y cualquiera otro objeto, se pasa á dar idea de otra proporcion numérica. Por ejemplo, si hay dos bolas á la vista, se le pregunta: ¿cuántas veces una bola tenemos aqui?—El niño mira, cuenta, y responde exactamente.—Si hay dos bolas, tenemos dos veces una bola. Entonces se varian las preguntas del modo siguiente: ¿cuántas veces uno ó cuántos unos son dos? ¿Tres, cuántas veces son uno? ¿Cuántas veces se contiene uno en dos, en tres, etc.? De esta manera adquiere el niño los simples elementos de la *adicion* y la *multiplicacion*, y puede ejercitarse en la *sustraccion* del modo siguiente: Si tomo una bola de diez, ¿cuántas quedan?—Cuenta el niño las que han quedado; halla nueve, y dice: si tomo una de diez quedan nueve.—Separa el maestro otra bolita, y pregunta: quitando de nueve una, ¿cuántas quedan? Nueve bolas, menos una que ha desaparecido, ¿cuántas bolas son?—Vuelve á contar el niño las bolas, halla ocho, y responde: quitando una bola de nueve quedan ocho, ó nueve menos uno son ocho; y asi sucesivamente hasta el fin. Es claro que se ha de continuar por el mismo método todo el sistema de numeracion hablada; por manera, que

luego que el niño sepa contar, sumar, multiplicar y sustraer hasta diez, aprenderá á contar, sumar, multiplicar y sustraer hasta veinte, y asi sucesivamente hasta que forme una idea clara de todo el sistema de numeracion hablada y de las dos operaciones fundamentales de todo cálculo: *la adicion* y la *sustraccion*. El paso inmediato es aprender la numeracion escrita, en lo cual se debe seguir el mismo método de claridad y exactitud. El valor intrínseco y relativo de los guarismos suele ser una de las dificultades que se presentan al enseñar la aritmética á los niños. Con este objeto se recomienda por algunos una série de ejercicios analíticos. Por ejemplo, se colocan delante de la seccion un número mayor ó menor de cifras en la forma ordinaria. Supongamos 62,516, y se analiza del modo siguiente:

6
10
500
2,000
60,000

Puestas asi las cifras con separacion, escribe el niño á derecha de cada uno su respectivo valor, y el ejemplo toma entonces la forma siguiente:

6	seis.
10	diez.
500	quinientos.
2,000	dos mil.
60,000	sesenta mil.

Luego se invierte el ejemplo de este modo:

60,000	sesenta mil.
2,000	dos mil.
500	quinientos.
10	diez.
6	seis.

Hecho asi, se tildan todas las palabras supérfluas, y se lee el ejemplo.—Este sistema de análisis puede continuar en la adicion, sustraccion, multiplicacion y division. Asi, en la suma nombrarán al fin de la columna las unidades, decenas, centenas, etc., y lo mismo en la sustraccion. En ambas se pueden presentar separadas las sumas y sustracciones parciales. Pondremos un ejemplo de sustraccion:

$$\begin{array}{r} 524 \\ 412 \\ \hline 112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

Los primeros ejemplos de multiplicacion deben comenzar del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\Big\} 2\times 1=2 \qquad\qquad \begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 24 \end{array}\Big\} 2\times 12=24$$

Un ejemplo mayor aclarará esta práctica:

$$6\times 15=\begin{array}{r} 6\times 5=30 \\ 6\times 10=60 \\ \hline 90= \end{array} \left\{\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ \hline 90 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$$

Finalmente, presentaremos un ejemplo de multiplicacion en que el razonamiento es tan óbvio, que habla á la vez á la mente y á los ojos del discípulo. Tal es el siguiente:

$$\begin{array}{rrr} & 4{,}239\times 5{,}064 & \begin{array}{r} 5{,}064 \\ 4{,}239 \\ \hline \end{array} \\ 4{,}239\times 5{,}064\left\{\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{r} 9\times 5{,}064= \quad 45{,}576 \\ 30\times 5{,}064= \quad 151{,}920 \\ 200\times 5{,}064= 1.012{,}800 \\ 4{,}000\times 5{,}064=20.256{,}000 \\ \hline 4{,}239\times 5{,}064=21.466{,}296 \end{array} & \begin{array}{r} 45{,}576 \\ 151{,}920 \\ 1.012{,}800 \\ 20.256{,}000 \\ \hline 21.466{,}296 \end{array} \end{array}$$

En la division se presentarán al discípulo los mismos pormenores que acabamos de ver en la multiplicacion:

$$\begin{array}{rl} 2684 & \\ \hline 4 & \\ \hline\hline 2000 & \\ \hline 4 & =500 \\ \hline 600 & \\ \hline 4 & =150 \\ \hline\hline 80 & \\ \hline 4 & =20 \\ \hline\hline 4 & \\ \hline 4 & =1 \\ \hline 2684 & \\ \hline & =671 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 21.466{,}296 : 5064 & \\ \hline 21.466{,}296 & \\ 20.256{,}000 & =4000\times 5064 \\ \hline 1.210{,}296 & \\ 1.012{,}800 & =200\times 5064 \\ \hline 194{,}496 & \\ 151{,}920 & =30\times 5064 \\ \hline 45{,}576 & \\ 45{,}576 & =9\times 5064 \\ \hline \end{array}$$

La enseñanza de los números quebrados debe ser precedida tambien de la intuicion material. El tablero, de que tambien hablaremos en otro lugar, es el mas á propósito para conseguir este objeto. En efecto, los doce cilindros iguales subdivididos en dos, tres, cuatro, etc., partes iguales, sirven para familiarizar á los niños con la idea justa del número quebrado y de sus propiedades. Para conseguirlo se le presenta primero el cilindro entero del primer alambre; luego el cilindro del segundo alambre, dividido en dos partes, cada una de las cuales se le llama un *medio* ó una *mitad* del cilindro. El niño ve entonces que estos dos medios son iguales al cilindro entero. El tercer alambre dividido en tres partes, á cada una de las cuales se le llama un *tercio* ó una *tercera* parte del cilindro entero, y cuya reunion compone el todo, les demuestra igualmente que tres terceras partes ó tres tercios son iguales á un entero. De esta manera puede tambien convencerse palpablemente á los niños que dos tercios, por ejemplo, son mas que dos sextos, presentándoles las dos partes del cilindro que está dividido en seis y las dos del cilindro dividido en tres. Por el mismo órden es tambien sumamente fácil hacerles comprender lo que es *numerador* y *denominador*, y por qué de dos números quebrados que tengan un mismo numerador será el mayor el que tenga menor denominador, así como de dos quebrados que tengan un mismo denominador será el mayor el que tenga mayor numerador. Todo esto, de difícil comprension para los niños por el simple raciocinio, se hace claro y palpable con el auxilio del tablero. Una vez llegado á esta altura de conocimientos en la aritmética, es ya de suma facilidad la continuacion de las demás lecciones.»

Cuando proponiamos este órden, no se habia aun publicado la nueva ley de pesas y medidas. Ahora que en esta se ha seguido el sistema decimal, creemos que el estudio de los decimales ha de preceder al de los quebrados comunes, y que han de proponerse ejemplos de números complejos y denominados tomados de las nuevas pesas, medidas y monedas. De esta manera adquirirán los niños una idea clara de este nuevo sistema, y se cumplirá tambien lo que el Gobierno tiene dispuesto acerca de este particular. Por lo demas, esta es la única innovacion que proponemos en la marcha trazada, que queda naturalmente fijada en los siguientes términos:

Numeracion hablada y escrita.

Operaciones fundamentales de la aritmética.—Aplicacion á los usos comunes.

Operaciones decimales.—Aplicacion á los números complejos por el nuevo sistema de pesas, monedas y medidas, prévia la explicacion de este sistema.

Operaciones de quebrados comunes.—Aplicacion á los usos de la vida.

Números denominados por el antiguo sistema de pesas y medidas.—Aplicacion á ejemplos familiares.—Comparacion y reduccion mútua de las pesas, monedas y medidas antiguas con las modernas.

Razones y proporciones con aplicacion á las reglas de tres, de compañía, aligacion, descuento, etc., etc., etc.

NOCIONES DE ÁLGEBRA (1).

§. I. *Signos y naturaleza de las operaciones del Algebra.*

El ALGEBRA es una ciencia que tiene por objeto abreviar y generalizar la resolucion de las cuestiones relativas á las cantidades en general.

Los elementos de que hacemos uso en el álgebra, son:

1.° Las letras del alfabeto que sirven para designar los números acerca de los cuales razonamos. Las cantidades conocidas se representan ordinariamente por las primeras letras del alfabeto, a, b, c..... ó A, B, C..... y las cantidades desconocidas por las últimas letras x, y, z, t, w, v.—Las cantidades análogas se designan muchas veces por las mismas letras con uno ó muchos acentos. Así: a', a'', a''', a'''', *(a primera, a segunda, a tercera, a cuarta,)* son cantidades análogas á a; x', x'', x''', x'''', son cantidades análogas á x. Otras veces se emplean con el mismo objeto los números 1, 2, 3...., como en x_1, x_2, x_3, que quiere expresar *x número 1, x número 2, x número 3, etc.*

2. Los signos abreviados de las cuatro primeras operaciones de la aritmética, á saber:

$+$ para la adicion $a+b$ *(a mas b.)*

$-$ para la sustraccion $a-b$ *(a menos b.)*

$\times$ para la multiplicacion $a\times b$ *(a multiplicado por b.)*

Puede tambien escribirse $a.b$, ó simplemente ab, sin interponer signo entre las dos letras; pero para los números es indispensable la interposicion del signo, á fin de que no se confunda por ejemplo el producto 2×4, 2 por 4, ú 8, con el número 24 que es tres veces mayor.

Para la division $a:b$ ó $\frac{a}{b}$ *(a dividido por b, ó a dividido entre b)* el segundo signo es el mas usado.

(1) Este tratadito no pertenece al autor; pero se ha encargado por el Editor á persona muy competente.

3.° El *coeficiente*, signo que se emplea para expresar que un número representado por una letra debe añadirse á sí mismo muchas veces. Asi se escribe $5a$, en lugar de $a+a+a+a+a$.

4.° El *exponente* ó grado de la potencia á que se ha elevado una cantidad. Asi se pone $a^5=aaaaa$.

5.° El signo *radical* $\sqrt{\ }$ que precede á un número indica que hay que extraer de este número una raiz de cierto grado; asi $\sqrt[7]{a^5\,b^2\,c}$ representa la raiz sétima de la cantidad $a^5\,b^2\,c$.

6.° El signo de igualdad, $a=b$ (*a igual b.*)

7.° El signo de desigualdad $>$ que dirige su punta hacia la cantidad mas pequeña. Asi $a>b$, se pronuncia *a* mayor que *b*, y $a<b$, *a menor que b*.

Para conocer bien las ventajas de los signos algebráicos, basta aplicarlos á la solucion de algunas cuestiones sencillas: entonces se vé cuánto abrevian y generalizan todos los razonamientos, que habria necesidad de hacer si no se empleasen estos signos. El ejemplo siguiente está tomado del álgebra de Mr. Lacroix.

Problema.

Dividir un número dado en tres partes tales, que el exceso de la parte media sobre la menor sea un número dado, y que el exceso de la mayor sobre la media sea otro número dado.

Solucion.

Con el lenguaje comun.	*Con la escritura algebráica.*
	Número designado para dividir. . . . . a,
	Exceso de la parte media sobre la menor. . . . . b,
	Exceso de la mayor sobre la media. . . . . . c,
	La menor será. . . . x,
La parte media será la menor, mas el exceso de la media sobre la menor.	La media será $x+b$.
La parte mayor será la media, mas el exceso de la mayor sobre la media.	La mayor $x+b+c$.
Las tres partes reunidas forman el número propuesto. Luego la parte menor, mas la parte menor, mas el exceso de la media sobre la menor, mas la menor, mas el exceso de la media sobre la menor, mas el exceso de la mayor sobre la media, igualan el número que hay que dividir.	Luego $x+x+b+x+b+c$. $=a$.
Luego tres veces la parte menor, mas dos veces el exceso de la media sobre la menor, mas el exceso de la mayor sobre la media, igualan el número que hay que dividir.	$3x+2b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor igualan el número que hay que dividir, menos dos veces el exceso de la media sobre la menor, y menos el exceso de la mayor sobre la media.	$3x=a-2b-c$.
Luego en fin, la parte menor iguala el tercio de lo que queda, despues que se ha quitado del número que hay que dividir dos veces el exceso de la parte media sobre la menor, y el exceso de la mayor sobre la parte media.	$x=\frac{a-2b-c}{3}$.

En este ejemplo hemos tenido que considerar varias *ecuaciones*, ó reuniones de cantidades iguales, separadas por el signo de igualdad y encerrando incógnitas. Hemos tenido tambien que efectuar varias operaciones fundamentales, tales como la adicion, sustraccion, etc., para llegar á la determinacion de la incógnita. Es, pues, necesario saber desde luego las cuatro reglas, para las cantidades algebráicas, y se pasará en seguida á lo que concierne á las ecuaciones.

§. II. *De las cuatro reglas fundamentales de la aritmética, ejecutadas con cantidades algebráicas.*

La ADICION ALGEBRAICA se hace escribiendo las cantidades que hay que añadir, unas á continuacion de las otras con sus signos. Lámanse *términos semejantes*, los compuestos de unas mismas letras con iguales exponentes, y que solo difieren por los coeficientes. Conviene *reducirlos*.

Monomio es una cantidad compuesta de un solo término; *polinomio* de varios, y se dá el nombre de *binomio*, *trinomio*, *cuadrinomio*, etc., á los polinomios que contienen dos, tres, ó cuatro términos.

LA SUSTRACCION ALGEBRAICA, se hace escribiendo al lado de la cantidad que se quiere sustraer, todos los términos de la cantidad que hay que sustraer, con signos contrarios á los que tienen.

Primer ejemplo. La adicion de los monomios $3a$, $5b$, $2c$, da $3a+5b+2c$.

Segundo ejemplo. La adicion de los monomios $4a^2$ b^3 $2a^2$ b^3 $7a^2$ b^3 da por suma $13a^2$ b^3.

Tercer ejemplo. La adicion de los polinomios $3a^2-4ab$, $2a^2-3ab+b^2$, $2ab-5b^2$ da, reduciendo los términos semejantes, $5a^2-5ab-4b^2$.

Cuarto ejemplo. La resta que se obtiene quitando $4b$ de $5a$, es $5a-4b$.

Quinto ejemplo. La resta que se obtiene quitando $2b-3c$ de $4a$, es $4a-2b+3c$. La operacion se indica así:

$$4a-(2b-3c)=4a-2b+3c.$$

El paréntesis que encierra $2b-3c$ indica que es de esta cantidad de la que hay que ejecutar la sustraccion.

Sesto ejemplo. La resta que se obtiene quitando $5a^2-4ab+3bc-b^2$ de $8a^2-2ab$ es $8a^2-2ab-5a^2+4ab-3bc+b^2$, ó, reduccion hecha en términos semejantes,

$$3a^2+2ab-3bc+b.^2$$

MULTIPLICACION ALGEBRAICA. La de los monomios es la mas sencilla, y se compone de cuatro reglas distintas, á saber:

1.° La regla de los signos. El producto de dos monomios con el mismo signo, lleva el signo $+$; el producto de dos momios de signos contrarios, lleva el signo $-$.

2.° La regla de los coeficientes. El coeficiente del producto es igual al producto de los coeficientes de los factores.

3.° La regla de los exponentes. El exponente de una letra en el producto es igual á la suma de los exponentes de la misma letra en los factores. Toda letra sin exponente se supone tiene por tal la unidad.

4.° La regla de las letras. Toda letra que no entra mas que en uno de los factores, entra en el producto con el mismo exponente.

Así se encontrará que

$$8a^2\,bc^2 \times 7abd^2 = 56a^3\,b^2\,c^3\,d^2\,,$$
$$\text{que}-21a^3\,b^2\,c^3\,dc \times 8abc^3 = -168a^4\,b^3\,c^4\,d,$$
$$\text{y que}-4abc \times -7df = 28abcdf.$$

Para multiplicar dos polinomios uno por otro, es preciso multiplicar sucesivamente todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, siguiendo, para los productos parciales, las cuatro reglas dadas para la multiplicacion de los monomios: despues de esto se hace la reduccion de los términos semejantes, si hay lugar.

Es bueno preparar los factores de tal manera que todos los términos estén colocados con relacion á las potencias crecientes ó decrecientes de la misma letra: entonces el primero y último término del producto son siempre irreductibles.

Se dispone la operacion como en el ejemplo siguiente, en que los factores, ordenados con relacion á las potencias decrecientes de a, se encuentran al mismo tiempo ordenados con relacion á las potencias crecientes de b.

Multiplicando.	$4a^3-5a^2b-8ab^2+2b.^3$
Multiplicador.	$2a^2-3ab-4ab^2$
1.er *producto parcial.*	$8a^5-10a^4b-16a^3b^2+4a^2b^3.$
2.° *producto parcial.*	$-12a^4b+15a^3b^2+24a^2b^3-6ab^4.$
3.er *producto parcial.*	$-16a^3b^2+20a^2b^3+32ab^4-8b^5.$
Producto total.	$8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5.$

DIVISION ALGEBRAICA. Para los monomios hay cuatro reglas análogas á la de la multiplicacion:

1.° El signo del cuociente es $+$ si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo; será — cuando tengan signos diferentes.

2.° El coeficiente del cuociente se obtiene dividiendo el coeficiente del dividendo por el del divisor.

3.° El exponente de una letra en el cuociente se obtiene quitando el exponente de esta letra en el divisor del exponente de esta misma letra en el dividendo.

4.° Todas las letras que están en el dividendo, sin hallarse en el divisor, entran como numerador en el cuociente; y todas las letras que se hallan en el divisor, sin entrar en el dividendo, deben ponerse como denominador al cuociente. Tenemos segun estas reglas

$$\frac{48a^3b^3c^2d}{12ab^2c}=a^2bcd;$$

$$\frac{-150a^5b^8cd^3}{30a^3b^5d^2}=-5a^2b^3ca;$$

$$\frac{-12a^4b^2cd}{-8a^2bc^2}=\frac{3a^2bd}{2c}$$

En este último ejemplo, el exponente 2 de la letra c en el divisor, excediendo en una unidad al exponente 1 de la misma letra c en el dividendo, si hubiésemos procedido segun las reglas de los exponentes, hubiéramos podido escribir c en el numerador con el exponente -1, y hubiéramos tenido por cuociente

$$\frac{3}{2}a^2bc^{-1}d.$$

En general se tiene $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

Este modo de anotar los exponentes negativos es muy cómodo en muchos casos.

Así se obtiene, segun la regla de los exponentes,

$$\frac{a^m}{a^m}=a^0=1.$$

La division de dos polinomios uno por otro, se hace ordenándolos con relacion á las potencias crecientes ó decrecientes de la misma letra; dividiendo al primer término del dividendo por el primer término del divisor, lo que dá el primer término del cuociente; restando del dividendo el producto del divisor por este primer término obtenido de esta manera; dividiendo de nuevo el primer término de la resta por el primer término del divisor, lo que dá el segundo término del cuociente; y así en los demás hasta que no quede resta, ó cuyo primer término no sea divisible por el primer término del divisor.

Damos á continuacion el cuadro de los cálculos de una division algebráica exacta.

$$\begin{array}{r|l}
10a^4-48a^3b+51a^2b^2+4ab^3-15b^4 & -5a^2+4ab+3b^2 \\
\underline{-10a^4+8a^3b+6a^2b^2} & \overline{-2a^2+8ab-5b^2} \\
-40a^3b+57a^2b^2+4ab^3-15b^4 & \\
\underline{+40a^3b-32a^2b^2-24ab^3} & \\
25a^2b^2-20ab^3-15b^4 & \\
\underline{-25a^2b^2+20ab^3+15b^4} & \\
0 &
\end{array}$$

Se puede desarrollar el cuociente en una *série* de un número indefinido de términos, cuando la operacion no se termina exactamente.

Así se obtendrá:

$$\frac{x}{x-a}=1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}+\text{etc.}$$

ó empleando el modo de anotar los exponentes negativos,

$$\frac{x}{x-a}=1+ax^{-1}+a^{2}x^{-2}+a^{3}x^{-3}+a^{4}x^{-4}+\text{etc.}$$

§. III. *Resolucion de las ecuaciones de primer grado.*

Nociones preliminares sobre las ecuaciones en general. *Resolver* ecuaciones es buscar los valores de las incógnitas. La resolucion de las ecuaciones, en general, es el problema de mas importancia del álgebra.

Una igualdad se reduce á una *identidad*, cuando dos *números*, separados por el signo de igualdad, son iguales independientemente de todo valor particular atribuido á las letras que entran en ellos. Tales son las igualdades

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b),$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Toda ecuacion debe convertirse en una identidad, cuando se sustituye á las incógnitas su verdadero valor.

Una ecuacion es *numérica*, cuando no hay en ella mas que los valores de las incógnitas que representan las letras; y es *literal* ó *algebráica* cuando las letras representan cantidades desconocidas.

Antes de resolver las ecuaciones, hay que efectuar con

ellas transformaciones de diversa uaturaleza: las mas sencillas son las siguientes:

1.° Se puede hacer pasar un término cualquiera de un miembro á otro, mudándole solamente el signo.

2.° Se pueden multiplicar ó dividir los dos miembros de una ecuacion por un mismo número.

Por consiguiente, se sacarán los denominadores de una ecuacion, reduciendo todos los términos al mas pequeño denominador comun, y suprimiendo en seguida este denominador.

Se simplificará tambien una ecuacion, dividiendo todos los términos por el mayor divisor comun.

Cuando se simplifica así una ecuacion, se evalua su *grado* segun la suma mayor de los exponentes de las incógnitas en un mismo término.

La ecuacion $5x-3y=4z+1$ es de *primer grado*, porque en ningun término la suma de los exponentes de las incógnitas x y z excede á 1.

La ecuacion $ax^3-21x^2zy+abz^2=by^3$ es de *cuarto grado*, porque en el segundo término la suma de los exponentes de las incógnitas es $2+1+1$. Esta ecuacion es además *homogénea*, es decir, que la suma de los exponentes de las letras conocidas ó desconocidas que entran en todos los términos, es constante é igual á 4.

Cuando una ecuacion contiene muchas incógnitas, puede resolverse de una porcion de modos diferentes; admite un número infinito de *soluciones*. En efecto, dando valores arbitrarios á todas las incógnitas, exceptuando á una, el valor de esta última se deduce de la ecuacion.

Son precisas, en general, tantas ecuaciones como incógnitas, para que el sistema de estas incógnitas esté completamente determinado.

Cuando el número de ecuaciones excede en m al número de las incógnitas, no puede hallarse solucion al sistema de ecuaciones propuesto, mientras que no se satisfaga á m ecuaciones de condicion entre los números y los constantes que entran en este sistema.

Resolucion de una ecuacion de primer grado de una sola incógnita. Segun las transformaciones precedentes, toda ecuacion de primer grado de una sola incógnita puede reducirse á la forma

$$ax=b$$

siendo cantidades constantes a y b. De aqui

$$x=\frac{b}{a}$$

A este valor x es lo que se llama una fórmula: representa las operaciones que hay que hacer para obtener la incógnita buscada.

Resolucion general de las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. —El sistema de dos ecuaciones de primer grado de dos incógnitas puede siempre reducirse á la forma

$$a\,x+b\,y=c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a'x+b'y=c'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Para resolver este sistema hay muchos métodos:

1.° *Por comparacion.* Se quita de cada una de las dos ecuaciones el valor de la misma incógnita, x por ejemplo, como si y estuviese conocida; y se igualan los dos valores de x, de lo que resulta una ecuacion que no contiene mas que y. Se obtiene entonces y. Del mismo modo puede obtenerse x.

2.° *Por sustitucion.* Se sustituye en la segunda ecuacion el valor de x, por ejemplo, sacado de la primera; y se obtiene entonces una ecuacion única en y.

3.° *Por sustraccion.* Se multiplican los dos miembros de la primera ecuacion por a', los dos miembros de la segunda por a, a y a', tomándolos con sus signos, y se separa la segunda de las ecuaciones así obtenidas de la primera; x desaparece, y se tiene una ecuacion en y.

Esta operacion, por la cual se hace desaparecer una ó muchas incógnitas de un sistema de ecuaciones propuesto, se llama *eliminacion*.

Cualquiera que sea el procedimiento de eliminacion seguido, los valores de x y de y, sacados de las ecuaciones (1) y (2) son:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$$
$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

Para resolver las tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas,

$$\left.\begin{array}{l} a\,x+b\,y+c\,z=d \\ a'\,x+b'\,y+c'\,z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{array}\right\} \quad (3)$$

por medio de uno de los tres métodos expuestos, se eliminará una de las incógnitas entre la primera y la segunda; despues otra entre la segunda y la tercera: se obtendrán entonces dos ecuaciones de dos incógnitas, entre las cuales se eliminará aun una de las incógnitas, y resultará por fin una ecuacion de primer grado con una sola incógnita. De la determinacion de esta se alcanzará fácilmente la determinacion de las otras, por via de sustituciones sucesivas.

Cualquiera que sea el método de eliminacion seguido para el sistema de ecuaciones (3), se obtendrá para las incógnitas los valores

$$x=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},\ y=\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}},\ z=\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{D}},$$

en los cuales se tiene:

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}\ =ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'' \\ \mathrm{N}\ =db'c''-dc'b''+cd'bd''-bd'c''+bc'd''-cb'd'' \\ \mathrm{N}'=ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a'' \\ \mathrm{N}''=ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''. \end{array}$$

Vemos, pues, que para una ecuacion de una sola incógnita, el número de términos del numerador y del denominador de la incógnita es 1.

Este número es de 2 ó de 1×2, para dos ecuaciones con dos incógnitas.

Es de 6 ó de $1\times2\times3$ para tres ecuaciones con tres incógnitas.

Será de 24 ó de $1\times2\times3\times4$ para cuatro ecuaciones de cuatro incógnitas; de 120 ó de $1\times2\times3\times4\times5$, para cinco ecuaciones de cinco incógnitas, y así sucesivamente.

La ley de formacion de los numeradores y de los denominadores de las incógnitas es tan bella como sencilla.

Para dos incógnitas, se toman los coeficientes a y b de las incógnitas, y se forman las permutaciones ab ba, que se separan por el signo—, colocando un acento en la última letra de cada permutacion, obteniendo así el denominador $ab' - ba''$. El numerador de cada una de las incógnitas x é y se obtiene sustituyendo la cantidad constante c, en lugar del coeficiente de la incógnita que se trata de determinar, dejando los acentos en su lugar. Para x se sustituye c en lugar de a en ab' y c' en lugar de a' en ba', lo que da $cb' - bc'$.

En el caso de tres ecuaciones de tres incógnitas, se introduce sucesivamente la letra c á la derecha, en el centro y á la izquierda de cada permutacion ab y ba, lo que da seis nuevas; se colocan tres seguidas despues de las tres primeras, separándolas alternativamente por los signos — y +; se pone en fin un acento en la segunda letra y dos en la tercera. De esta manera queda formado el denominador D. El numerador de cada una de las incógnitas, se obtiene sustituyendo, en el denominador, la cantidad constante al coeficiente de esta incógnita, y dejando los acentos en su lugar.

Esta ley de formacion es general.

§. IV. *De las ecuaciones de segundo grado.*

Resolucion de la ecuacion binomia. La ecuacion mas sencilla de segundo grado de una sola incógnita es la que no contiene mas que la primera potencia de la incógnita. Puede expresarse bajo la fórmula $ax^2 = b$;

$$\text{ó } x^2 = \frac{b}{a}$$

$$\text{y } x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

Se pone el doble signo $\pm$ (mas menos) porque el

cuadrado $\frac{b}{a}$ puede provenir de una raiz negativa $-\sqrt{\frac{b}{a}}$, del mismo modo que de una cantidad positiva $+\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Resolucion de la ecuacion completa. Una ecuacion completa de segundo grado puede extenderse bajo la fórmula

$$x^2 + px + q = 0$$

p y q son cantidades conocidas, enteras ó fraccionarias, positivas ó negativas.

Las dos *raices*, los dos valores de la incógnita se ponen bajo la fórmula

$$x = \frac{1}{2}\left(-p \pm\sqrt{p^2 - 4q}\right),$$

ó de otra manera

$$x = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ldots. \qquad (2)$$

que es muy fácil de explicar en lenguaje comun.

Si se quisieran conservar únicamente los coeficientes enteros en la ecuacion primitiva, se colocaria en esta forma

$$a\,x^2 + b\,x + c = o$$

y las raices serian de la fórmula mas general

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

La solucion de ecuaciones de segundo grado conduce á la consideracion de cantidades *imaginarias*, que no tienen mas que una existencia simbólica y que difieren esencialmente de las cantidades *reales*. En efecto, si en los valores (1), (2) y (3) las cantidades $\frac{b}{a}$, $\frac{p^2}{4} - q$ y $b^2 - 4ac$ son negativas, ningun valor real, positivo ó negativo, colocado en lugar de x en las ecuaciones primitivas, no podria conducirnos á resultado.

Toda raiz imaginaria de una ecuacion de segundo grado puede expresarse bajo la fórmula

$$a \pm b\sqrt{-1},$$

en la que a y b son cantidades reales.

Raiz cuadrada de las cantidades literales. — La solucion de las ecuaciones de segundo grado exige que se sepa extraer la raiz cuadrada de las cantidades algebráicas.

Para extraer la raiz cuadrada de un monomio, es preciso extraer la raiz cuadrada del coeficiente numérico, y dividir por 2 el exponente de cada una de las letras de este monomio.

Cuando la operacion no puede hacerse completamente, hay *un radical de segundo grado.*

Se llaman radicales *semejantes* los que no difieren mas que por las cantidades que multiplican el radical. Tales son $5\sqrt{2ab}$ y $3\left(c+d\right)\sqrt{2ab}$

Para combinar, por via de adicion ó de sustraccion radicales semejantes, basta hacer estas operaciones con los multiplicadores de las radicales, y dar al resultado el radical comun.

Para obtener el producto ó el cuociente de dos radicales de segundo grado, se hace el producto ó el cuociente de las cantidades colocadas bajo el signo $\sqrt{\ }$, y se le cubre con el mismo signo.

Para extraer de la radical los factores que son cuadrados perfectos, basta colocar las raices de estos cuadrados como factores antes del radical.

Para hacer entrar un factor bajo el radical, es preciso elevar este factor al cuadrado.

El procedimiento para la extraccion de la raiz cuadrada de un polimonio, se deduce de la ley de formacion del cuadrado, á saber que el cuadrado de un polinomio de un número cualquiera de términos se compone del cua-

drado del primer término, del doble producto del primer término por el segundo, del cuadrado del segundo del doble producto de cada uno de los dos primeros términos por el tercero, del cuadrado del tercero, del doble producto de cada uno de los tres primeros por el cuarto, del cuadrado del cuarto, y asi de los demas.

Síguese de aqui, que para extraer la raiz cuadrada de un polinomio, es necesario ordenarlo con relacion á las potencias crecientes ó decrecientes de la misma letra; extraer la raiz del primer término, lo que da el primer término de la raiz; suprimir el primer término del polinomio, y dividir el primer término de la resta por el duplo del primer término de la raiz, lo que da el segundo término de la raiz; quitar de la resta el doble producto del primer término de la raiz por el segundo y el cuadrado del segundo; dividir el primer término de la segunda resta por el duplo del primer término de la raiz, lo que da el tercer término de esta raiz; quitar de la segunda resta los dobles productos de los términos primeros y segundo por el tercero y el cuadrado del tercer término; dividir el primer término de esta tercera resta por el duplo del primer término de la raiz, lo que dá el cuarto término de esta raiz, y asi de los demas.

La extraccion de la raiz de un polinomio que no es cuadrado perfecto, conduce, como la division, á séries de un número indefinido de términos. Asi, empleando la anotacion de exponentes negativos, la extraccion de la raiz del binomio $b^2 - 4ac$, que no puede ser jamás un cuadrado perfecto, da la série

$$b - 2acb^{-1} - a2^2 c^2 b^{-3}$$
$$- 4a^5 c^3 b^{-5} - etc.$$

Cuando hay que extraer la raiz de una expresion de la forma $a + \sqrt{b}$, el resultado se obtiene por medio de la fórmula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

que da lugar á una simplificacion notable, si $a^2 - b$ es un cuadrado perfecto.

Ecuaciones de segundo grado con varias incógnitas. Consideremos solamente el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Si una de ellas es de primer grado, se obtiene el valor de una de las incógnitas, y sustituyendo este valor en la otra ecuacion, esta resultará de segundo grado y de una sola incógnita. Se puede pues resolverla fácilmente.

Si una de las ecuaciones es de primer grado con relacion solamente á una de las incógnitas, se obtiene el valor de esta incógnita, que se sustituye en la otra ecuacion, y resulta entonces una ecuacion de tercer grado.

En fin, la eliminacion de una de las incógnitas entre dos ecuaciones completas de segundo grado de dos incógnitas, conduce á una ecuacion de cuarto grado.

§. V. *Diversas aplicaciones de escritura algebráica.*

El uso de los signos algebráicos facilita considerablemente el descubrimiento de las propiedades de los números. Basta pues aplicar estos signos y estas anotaciones á los hechos que hemos enunciado en aritmética, con relacion á la division, á las fracciones decimales, á las proporciones, á las progresiones y á los logaritmos, para generalizar estos hechos y ver en lo que son aplicables á los sistemas de numeracion diferentes del sistema decimal.

Fracciones contínuas.—Se llama asi toda expresion de la forma

$$a+\cfrac{B}{b+\cfrac{C}{c+\cfrac{D}{d}+\text{etc.}}}$$

Pero no se considera ordinariamente mas que las fracciones contínuas en las cuales los numeradores B, C, D, son iguales á la unidad, es decir, las que son de la forma

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

a, b, c, d, son los *cuocientes incompletos.*

Milord Brouncker fué el primero que ha hecho uso de las fracciones contínuas; pero las propiedades y las ventajas de estas expresiones han sido descubiertas principalmente por Huygens.

Para reducir una fraccion comun, tal como $\frac{1103}{887}$, en fraccion contínua, se sigue el procedimiento para buscar el mayor divisor comun entre los dos términos; los cuocientes sucesivos son 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, y la fraccion contínua se escribe asi:

$$\frac{1103}{887}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

Cuando se quiere volver de la fraccion contínua á la fraccion que ha servido para formarla, se toman las cantidades consecutivas

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9}},\ \text{etc.},$$

ó reduciendo,

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{46}{37},\ \text{etc.}$$

Estas nuevas fracciones se llaman *reducidas.*

Cuando se conocen dos reducidas consecutivas $\frac{M}{N}$ y $\frac{P}{Q}$ la reducida siguiente $\frac{R}{S}$ correspondiente al cuociente incompleto r se obtiene por medio de la fórmula

$$\frac{R}{S}=\frac{Pr+M}{Qr+N}$$

El verdadero valor de una fraccion contínua está siempre comprendido entre dos reducidas consecutivas, las cuales son alternativamente, á contar desde la primera, menores y mayores que este valor.

Las reducidas son todas irreductibles.

La diferencia entre dos reducidas consecutivas tiene por numerador la unidad, y por denominador el producto de los denominadores de estas reducidas. El error cometido al tomar cualquiera reducida por el valor de la fraccion, es menos que la expresion de la diferencia.

Una reducida $\frac{P}{Q}$ expresa el valor de la fraccion contínua mas exactamente que toda fraccion cuyo denominador es menor que Q.

Haygens, para la construccion de su *autómata planetario*, tenia que establecer las ruedas de engranaje en dimensiones determinadas por los elementos del sistema solar, y cuyas relaciones estaban expresadas por números muy elevados; y á fin de no multiplicar prodigiosamente el número de dientes, trató de simplificar estas relaciones. Las fracciones contínuas le condujeron á este resultado, y las propiedades de las reducidas le enseñaron el valor de la aproximacion que obtenia.

Toda fraccion contínua, periódica, simple ó mixta, expresa una de las raices de una ecuacion de segundo grado.

Evaristo Galois, jóven geómetra de gran mérito, que un fin trágico y prematuro arrebató á la ciencia en 1833, no siendo aun mas que alumno de matemáticas, habia encontrado, en 1829, algunas proposiciones muy elegantes para este objeto. Ha demostrado que si una de las raices de una ecuacion de segundo grado, es una fraccion contínua inmediatamente periódica, se obtendrá la otra raiz de esta ecuacion dividiendo la unidad negativa por la fraccion contínua periódica vuelta al revés: de modo que los valores

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

$$\text{y } x=-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}}$$

son necesariamente raiz de una misma ecuacion de segundo grado, que es efectivamente

$$3x^2-8x-7=0.$$

Ha demostrado ademas Galois, que para que sea asi, es menester que una de las raices sea mayor que la unidad y que la otra esté comprendida entre 0 y —1; y que recíprocamente es siempre asi cuando las dos raices están comprendidas en tales límites.

En fin, Galois ha probado que toda ecuacion de segundo grado de la forma

$$ax^2-bx-a=0$$

tiene sus raices, no solo igualmente periódicas, sino tambien simétricas; de tal manera, que los denominadores igualmente distantes de los extremos, son iguales entre sí.

Euler, Lagrange, uno de los Bernouilli y Mr. Wronski han cultivado mucho la teoría de las fracciones contínuas.

Fracciones de Lambert.—Lambert, uno de los geómetras mas distinguidos del siglo último, nieto de uno de los franceses espatriados despues de la renovacion del edicto de Nantes, fué el primero en proponer una especie de fracciones poco conocidas, y que tienen la ventaja singular de formar resultados mas *convergentes* que ninguna série geométrica; es decir, que ningun resultado de términos decrecientes, siguiendo una progresion geométrica, no se aproxima mas que á un cierto valor determinado por el mismo número de términos.

Lagrange se ha ocupado tambien de estas fracciones, que ha colocado entre las fracciones contínuas, en el quinto cuaderno del *Diario de la Escuela politécnica.*

Para dar una idea, tomemos la fraccion $\frac{887}{1103}$. Dividamos 1103 por 887, que da por cuociente 1, y por resta 216; despues 1103 por 216 que da por cuociente 5 y por resta 23; y asi de las demas tomando siempre el mismo dividendo 1103, y por divisores las restas consecutivas; los cuocientes sucesivos seran 1, 5, 47, 50, 367, 551, 1103, y las restas 216, 23, 22, 3, 2, 1.

Se pondrá entonces

$$\frac{887}{1103}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5,47}-\frac{1}{5.47.50}$$
$$+\frac{1}{5.47.50.367}-\frac{1}{5.47.50.367.551}$$
$$+\frac{1}{5.47,50.565.551.1103}$$

Haciendo la misma operacion con la fraccion

$$\frac{14159265358979323846264 3}{1000000000000000000000000}$$

que añadida al número entero 3 expresa la relacion π de la circunferencia al diámetro, tendremos

$$\pi=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}-\frac{1}{7.113.4739}+\text{etc.}$$

Aqui las divisiones se han hecho *dentro ó fuera*, segun haya sido necesario, para que cada resta sea menor que la mitad de la precedente.

Los dos primeros términos dan el resultado de Arquimedes $\frac{22}{7}$; los tres primeros, el de Adriano Metius $\frac{355}{113}$.

PROGRESIONES POR DIFERENCIA Y POR CUOCIENTE. Sean a y A los primeros términos de dos progresiones, la una por diferencia y la otra por cuociente; n y N los últimos términos que dan $m-1$ antes que ellos; r y R la diferencia y el cuociente constantes; s y S las sumas de los términos de dos progresiones; P el producto de todos los términos de la progresion geométrica, y se tendrán las fórmulas

$$r=\frac{n-a}{m-1},\ \mathrm{R}=\sqrt[m-1]{\frac{\mathrm{N}}{a}}$$

$$s=\frac{1}{2}(a+n)\,m,\ \mathrm{P}=\sqrt{\mathrm{A}^m\,\mathrm{N}^m}$$

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{NR}-\mathrm{A}}{\mathrm{R}-1}=\frac{\mathrm{A}\,(\mathrm{R}^m-1)}{\mathrm{R}-1}.$$

Se reconoce, pues, á la simple inspeccion de estas fórmulas, la analogía ya notada entre las operaciones relativas á las dos especies de progresion.

Las dos ecuaciones relativas á las progresiones por diferencia sirven para determinar dos de las cinco cantidades a, n, m, r, s, cuando se conocen las otras tres, lo que dá lugar á 10 problemas diferentes. Las 3 ecuaciones relativas á las progresiones por cuociente dan lugar á 20 problemas diferentes cuando se quiere determinar 3 de las 6 cantidades A, N, m, R, S, P conociendo las otras tres.

ESPONENCIALES Y LOGARITMOS. Entre estos problemas, aquellos donde m es desconocida, conducen á las ecuaciones de la forma $a^x=b$ á las cuales se da el nombre de *esponenciales*: a y b son cantidades conocidas. Para resolver la ecuacion $a^x=b$ se forman las potencias sucesivas de a; se encuentra que b está comprendida entre a^n y a^n+1.

Colocando $\frac{b}{a^n}=c$, se opera de la misma manera en la ecuacion $c^{x'}=a$, y se encuentra a comprendido entre $c^{n'}$ y $c^{n'+1}$.

Continuando de la misma manera, se tendrá x, bajo la forma de fraccion contínua, á saber:

$$x=n+\cfrac{1}{n'+\cfrac{1}{n''+\cfrac{1}{n'''+\text{etc.}}}}$$

Si se supone que en la ecuacion $a^x=y$ conservando a el mismo valor, se buscan todos los valores de x, que corresponden á todos los valores de y, los primeros no serán mas que los logaritmos de los segundos.

a es la base del sistema de logaritmos. Para pasar de un sistema de logaritmos calculado en la base a á los logaritmos de la base b, es preciso multiplicar los primeros por un número constante M, que se llama *módulo*, y que no es otra cosa que el cuociente de la unidad por el logaritmo de la nueva base b calculada en el sistema cuya base es a.

NUMEROS POLÍGONOS. Si se considera la mas sencilla de las progresiones aritméticas, á saber:

$$\div 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \ldots$$

y se toman las sumas uno, de dos, de tres, cuatro..... primeros términos, se obtendrá la série

1, 3, 6, 10, 15..... á los que se llama *triangulares* ó *trigonios*, porque siempre se les puede ordenar en forma de triángulo, con tantos puntos como unidades contienen, por ejemplo en los siguientes:

1, 3, 6, 10, 15, etc.

y el *lado* de cada triángulo es uno de los números de la continuacion 1, 2, 3, 4, etc.

Los números trigonios están representados por la fórmula $\frac{1}{2}(n^2+n)$ ó $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Tomando la progresion aritmética

$$\div 1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ \text{etc.},$$

cuya razon es 2, se deducirá del mismo modo las sumas

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. etc.

que forman los números *cuadrangulares* ó *cuadrados*, denominacion justificada por las figuras siguientes:

1, 4, 9, 16, 25, etc.

La fórmula de los cuadrados es n^2.

La progresion aritmética

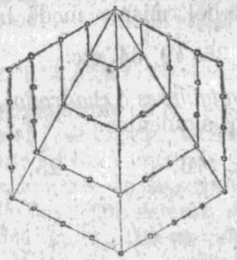
$$\div 1.\ 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ \text{etc.}$$

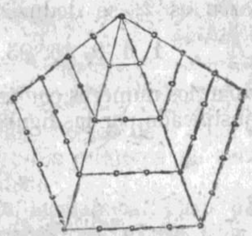
cuya diferencia es 3, dará, por la suma de uno, de dos, de tres términos, los números 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc. que llevan el nombre de *pentágonos*, y que están comprendidos en la fórmula $\frac{1}{2}(3n^2-n)$ ó $\frac{1}{2}n(3n-1)$.

De la misma manera se encontrarán los números *exágonos*, *eptágonos*, *optógonos* etc.

Para representar con puntos los polígonos de un número cualquiera de lados, se empieza por trazar un polígono regular que tenga el número de lados pedido; este número es constante para una misma série de números polígonos, y es igual á la diferencia de la progresion aritmética, que es el orígen de la série aumentada en el 2. Se tiran en seguida de uno de los vértices del polígono rectas indefinidas á los demás vértices; se toma en estas rectas de longitudes iguales á un cierto número de veces las partes comprendidas entre el orígen comun y los diversos vértices del primer polígono; se unen con nuevas rectas paralelas á los lados de este polígono los puntos en que el compás se ha fijado, y se dirigen estas rectas de partes iguales á los lados de este mismo polígono.

Las dos figuras siguientes representan las construcciones ejecutadas por los números pentágonos y exágonos.





La fórmula general de los números polígonos del órden m, por el lado n, es

$$\frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}$$

Para reconocer si un número es polígono del órden m, basta multiplicarlo por el número 8 $(m-2)$ y añadir al producto el cuadrado $(m-4)^2$; si la suma es un cuadrado perfecto a^2 el número propuesto es un polígono de la especie determinada.

En este caso, el lado n al cual corresponde el polígono se obtendrá por la fórmula

$$n=\frac{a+m-4}{2\,(m-2)}$$

Números figurados. Algunos autores confunden sin razon los números *polígonos*, de que acabamos de ocuparnos, y que se derivan de progresiones aritméticas diferentes, con los números *figurados* en que cada série se deriva de la misma progresion aritmética.

Asi, añadiendo los términos de la primera progresion

$$\div\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7....$$

se obtiene la série

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \text{etc.}$$

Añadiendo los términos de este, se obtiene la série

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ \text{etc.}$$

que forma los *números piramidales*. Continuando de la misma manera, resultan de la primera progresion *los números figurados de primer órden*.

Los números figurados de segundo órden se derivan igualmente de la primera progresion

$$\div\ 1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.....$$

y son

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64.....$$
$$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ 140,\ 204,\ \text{etc.}$$

Los números figurados del órden m se derivan de la progresion por diferencia

$$\div\ 1.\ 1+m.\ 1+2m.\ 1+3m.\ 1+4m.$$

La suma de los números piramidales del órden $m-2$ se obtendrá por la fórmula

$$\frac{n^3\,(m-2)+3n^2-n\,(m-5)}{6}$$

Si $m-2=1$ dan, $\dfrac{n^3+3n^2-n+2n}{6}$ ó $\dfrac{n(n+1)\,(n+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.}$

Si $m-2=2$, dan $2\,n^2+3n+n$ ó $\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3.}$

Triangulo aritmetico de Pascal. Esta figura, debida al genio de Pascal, tiene propiedades muy notables.

Se vé que las casillas de la primer banda horizontal, no contienen mas que la unidad. En cada una de las bandas siguientes, el número de una casilla cualquiera es igual á la suma de los dos números contenidos en la casilla próxima de la izquierda, y en la casilla inmediatamente superior á esta.

El primer número de cada banda es la unidad, y el orígen de cada banda retrocede una casilla hácia la derecha.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1

La primera propiedad del triángulo aritmético es dar, en sus bandas horizontales, los números figurados del primer órden.

La segunda banda contiene los números naturales; la tercera, los números triangulares; la cuarta, los números piramidales, y así de las demas.

En las bandas paralelas á la diagonal ó á la hipotenusa del triángulo se encuentran los mismos números.

Vinomio de Newton. Pero la propiedad mas notable, consiste en que las bandas verticales contienen los coeficientes de los diferentes términos de una potencia cualquiera, de un binomio $x+a$.

La banda vertical que tiene el número natural 1, corresponde á la primera potencia. Los coeficientes son 1 y 1.

La banda que tiene el número natural 2, corresponde á la segunda potencia. Los coeficientes son 1, 2, y 1.

Para la tercera potencia, se encuentran del mismo modo los coeficientes 1, 3, 3, 1; para la cuarta 1, 4, 6, 4, 1, etc.

Se podrá pues formar una potencia cualquiera del binomio $x+a$, en medio del triángulo aritmético, si se conoce el modo como entran en esta potencia las letras x y a.

Luego la suma de los exponentes de estas letras, en cada término, es constante é igual en el grado de la potencia, desde el primer término que no contiene mas que x, hasta el último que solo contiene a; los exponentes de x van decreciendo una cantidad, y los de a van creciendo otra.

$$(x+a)^1=x+a$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

Tendrémos pues $(x+a)^3=x^3+3ax^2+a^2x+a^3$

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$

y mas generalmente

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}a^2x^{m-2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ n}a^nx^{m-n}+\ldots+ma^{m-1}x+a^m$$

Esta hermosa fórmula es debida á Newton, que la ha encontrado por induccion: lleva su nombre.

DE LAS COMBINACIONES. Se llaman asi todos los productos diferentes que se pueden formar con m letras tomadas de n á n.

Se distiguen las *combinaciones* de las *permutaciones* en que muchas de estas últimas están enteramente compuestas de las mismas letras, escritas solamente en un órden diferente.

Asi las cuatro letras a, b, c, d, tomadas de dos á dos, dan las séis combinaciones

ab, ac, ad, bc, bd, cd

y las doce permutaciones

ab, ac, ad, bc, bd, cd

ba, *ca*, *da*, *cb*, *db*, *dc*.

El triángulo aritmético puede servir para determinar el número de combinaciones de m letras n á n. Si se trata, por ejemplo, de hallar este número para *ocho* letras tomadas *tres* á *tres* se descenderá en el lado vertical que corresponde al número natural 8, hasta encontrar la *cuarta* raya horizontal, y se hallará 56 para el número buscado.

La fórmula del binomio conduce al mismo resultado; porque el coeficiente del término que tiene n ante sí, espresa precisamente el número de combinaciones de m letras tomadas n á n. Luego el coeficiente es

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3:\ldots\ n}$$

haciendo $m=8$ y $n=3$ se tiene

$$\frac{8.\ 7.\ 6}{1.\ S.\ 3}=56.$$

Estas aproximaciones entre los números figurados del primer órden, el triángulo de Pascal, el binomio de Newton y la teoría de las combinaciones, son muy notables.

El número de permutaciones de m letras, n á n es

$$m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-n+1).$$

y el número de permutaciones de n letras á n es $1.2.3.4\ldots(d-1)n$.

Si se da pues una palabra cualquiera, por ejemplo AMOR y se quiere saber cuantas palabras diferentes se pueden formar con sus cuatro letras, lo que da todos los anagramas posibles de esta palabra, se encuentra que son en número de veinte y cuatro, á saber, el producto de los números consecutivos 1, 2, 3, 4.

Una palabra de cinco letras dará lugar á 120 permutaciones; una palabra de seis letras á 720; de siete letras á 5040 etc.

Pero si en la palabra propuesta hay una ó varias letras repetidas, será menester dividir para cada una de estas letras, por el producto de los números enteros consecutivos 1, 2, 3..n, siendo n el número de veces que la letra está repetida. Así la palabra *Leopoldus* en que las fetras l y o entran dos veces, no es susceptible mas que de 90720 enagramas diferentes, en lugar de 362880 que resultarían si ninguna letra estuviese repetida: el primero de estos números es igual al segundo dividido por 2 y aun por 2.

La palabra *studiosus* en que u está repetida dos veces y s veces, no es susceptible mas que de

$$\frac{362880}{1\ 2\times 1.2.3.}$$

ó de 30240 permutaciones diferentes.

Puede tambien citarse en el mismo género el verso latino

Tot, tibi, sunt, dotes, virgo, quot, sidera cœlo

compuesto por el Bauhays, jesuita de Louvain.

Este verso es célebre por el gran número de permutaciones de que es susceptible, sin que se infrinjan las leyes prosódicas.

Erypcios Putaneus se ha tomado el trabajo de hacer una enumeracion de estas permutaciones en 48 páginas, ascendiendo á la 1022ª, número de estrellas conocido entonces haciendo notar que la vírgen tenía mas virtudes que estrellas hay en el cielo.

El P. Prestet estendió á 3276 el número de las transformaciones posibles del verso.

Pero Santiago Bernouilli en su *Ars conjectandi* ha probado que aun separando los versos espondéos, y admitiendo solamente los que no tienen cesura, se consiguen á 3312 permutaciones.

Se cita tambien este verso de Tomás Lansins.

Mars, mors, sers, lis, vis, Styx, pus, nox, fex, mala, crux, fraux.

No es difícil encontrar que conservando la palabra *ma-*

la el antepenúltimo lugar, para arreglarse á la medida, es el verso susceptible de 39 916 800 arreglos diferentes.

Las sencillas combinaciones de cuadrados divididos en dos triángulos de dos colores diferentes, dan lugar á efectos muy agradables, de que los arquitectos pueden sacar mucho partido para el embaldosado de los edificios públicos y particulares.

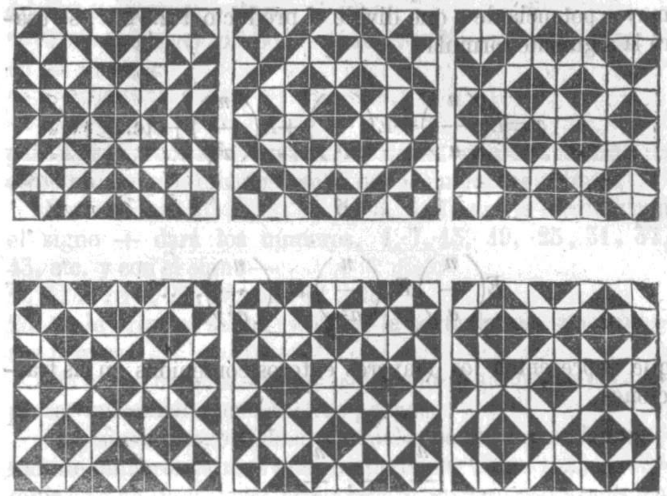
1 2 3 4

Se ve desde luego (fig. 1,2.3.4) que, siguiendo la situacion que se dé á un solo cuadrado, se pueden formar cuatro diseños diferentes, que sin embargo se reducen á dos, puesto que el primero y el tercero, el segundo y el cuarto no difieren sino en que las partes claras y en sombra se cambian mutuámente.

De la combinacion de dos cuadrados resultarán sesenta y cuatro colocaciones diferentes; porque en cada uno de los cuatro lados de los cuadrados representados en las figuras 1, 2, 3 y 4 puede colocarse otro cuadrado en cuatro posiciones: tendrémos pues en todo 4×4×4 ó sesenta y cuatro colocaciones.

Pero de estas sesenta y cuatro, la mitad repite la otra en el mismo sentido, quedan reducidos á treinta y dos; y se podrán reducir á diez y seis no tomando en cuenta la situacion.

Se podrán tambien combinar dei mismo modo tres, cuatro ó cinco cuadrados unos con otros: resultará que tres cuadrados pueden formar entre si 128 dibujos, que cuatro forman 256. etc. Las figuras siguientes demuestran los mas notables que nacen de un número tan pequeño de elementos.



VI. *Propiedades generales de los números.*

Los filósofos antiguos habian hecho investigaciones bastante estensas sobre las propiedades de los números. Se encuentran fragmentos muy curiosos de estas investigaciones en Euclides y sobre todo en Diofante. Desde este último hasta los tiempos de Viete y de Bachet, continuaron ocupándose los matemáticos de los números, pero sin grán éxito, circunscribiéndose mas bien á arreglos pueriles y pretendidas propiedades misteriosas, que á estudios solidos y profundos. Fermat que siguió á Viete y á Bachet, hizo algunos adelantos en esta materia, quedándonos de él un gran número de interesantes proposiciones; pero casi todas sin demostracion. Ha sido preciso el genio de Euler, de Lagrange, de Legendre y de Cauchy etc. para llegar á demostraciones rigurosas de estos teoremas interesantes.

DE LOS NÚMEROS PRIMOS. Para averiguar cuantas veces x un número primo a es factor en la serie natural de los números desde 1 hasta n, ó lo que viene á ser lo mismo, cual es la mayor potencia de a que divide el producto $1.2.3\ldots n$, se usará la siguiente fórmula

$$x=E\left(\frac{n}{a}\right)+E\left(\frac{n}{a^2}\right)+E\left(\frac{n}{a^3}\right)+\text{etc...}$$

ó

$$E\left(\frac{n}{a}\right)E,\left(\frac{n}{a^2}\right)E,\left(\frac{n}{a^3}\right),\ldots$$

que representan los mayores enteros contenidos en las fracciones.

$$\frac{n}{a},\ \frac{n}{a^2},\ \frac{n}{a^3},\ldots$$

prolongada la serie tantas veces como el numerador n es mayor que el denominador.

Así, para saber cuantas veces el factor 7, se encuentra en el producto de los números naturales de 1. á 10,000 tomaremos

$$E\left(\frac{10000}{7}\right)=1428$$
$$E\left(\frac{1428}{7}\right)=204$$
$$E\left(\frac{204}{7}\right)=29$$
$$E\left(\frac{29}{7}\right)=4$$
$$\textit{suma}\quad 1665$$

Cuyo producto es divisible por 7. elevado á la potencia mil seiscientos sesenta y cinco.

Todo número primo, exacto 2. y 5. está comprendido en la fórmula

$$6x\pm1$$

pero la recíproca no es exacta, es decir, que esta fórmula da otros números al mismo tiempo que los números primos.

Haciendo $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc. la fórmula con el signo $+$ dará los números, 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, etc. y con el signo —
1, 5, 11. 17, 23, 29, 35. 41, etc.
25. en la primera seria, y 35 en la segunda no son números primos.

No existe ninguna fórmula algebráica á propóstto para espresar únicamente los números primos.

Hay sin embargo algunas fórmulas notables por la multitud de números primos que comprenden. Tales son; la fórmula

$$x^2+x+17$$

cuyos 17. primeros términos son números primos, la fórmula

$$2x^2+29$$

cuyos 29 primeros términos lo son tambien; la fórmula

$$x^2+x+41$$

cuyos 40 primeros términos lo son del mismo modo.

Es decir que si se hacen estas fómulas sucesivamente $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,\ldots$ los mismos que resultan, y que son para la primera 17, 19, 23, 29, etc.; para la segunda, 29, 31, 37, 47, etc.; para la tercera, 41, 43, 47, 53, 61, 71, etc. son números primos hasta los límites indicados.

Fermat habia anunciado (sin decir que hubiese hallado la demostracion) que la fórmula 2^x+1 daba siempre números primos con tal que se tomase por x un término de la progresion doble 1, 2, 4, 8, 16,... pero Euler ha hallado que esta fórmula podia usarse á falta de la de $x=32$ porque resulta el número 4 294 967 297 divisible por 641 y que da por cociente 6 700 417.

Aunque la serie de los números primos es extraordinariamente irregular, se puede sin embargo hallar con una precision muy satisfactoria cuantos números hay desde 1 hasta un límite dado x. La fórmula que sirve para resolver esta cuestion, es

$$y=\frac{x}{2{,}302585.\ \mathrm{Log}.x-1{,}0365}$$

Legendre, á quien debemos esta fórmula, la ha comprobado por medio de las tablas de Vega que contienen los números primos hasta 400,000. Dando á x este valor se halla $y=33854$: el computo directo en las tablas de Vega da 33861.

El *cribum aritmeticum* de M. Ladislao Chernac que se extiende hasta 1 000 000, ha proporcionado al misme Legendre una nueva comprobacion; porque se encuentran en esta tabla 78493 números primos, y la fórmula indica 78543. El resultado producido contiene solo un error de 50 unidades en 78493 ó de $\frac{1}{1570}$ próximamente.

DE LOS NÚMEYOS PERFECTOS. Llámanse así aquellos que son iguales á la suma de sus partes alícuotas. Tal es 6 que es igual á la suma de sus partes alícuotas 1, 2, 3,... Tal es tambien $28=1+2+4+7+14$.

Para hallar números perfectos, es preciso tomar la progresion doble:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, etc., y examinar aquellos de estos términos que disminuidos en una unidad, son números primos. Los que gozan de esta propiedad dan 2, 4, 8, 32, 128, 8192; porque disminuidos en una unidad son 1, 3, 7, 31. 127, 8191. Se multiplicará cada uno de estos últimos números por el de la progresion geométrica

que precede al de que se deriva, por ejemplo, 3 por 2, 7 por 4, 31 por 16; y se tendrá 6,28, 496, 8128, 33550336 que son números perfectos.

Todos los números perfectos terminan en 6 ó en 28.

Euclides ha demostrado (Elementos, libro 9 prop. 36) que si 2^n-1 es un número primo, $2^{n-1}(2^n-1)$ es un número perfecto. Se tendrá pues en la serie de los números perfectos ademas de los que acabamos de citar, los siguientes:

$2^{16}(2^{17}-1)=8589869056$
$2^{18}(2^{19}-1)=137438691328$
$2^{30}(2^{31}-1)=2305843008139952128$

$2^{31}-1$, que Euler asegura ser primo, es el mayor número primo conocido hasta ahora, y por consiguiente $2^{30}(2^{31}-1)$ es el mayor número perfecto conocido.

DE LOS NÚMEROS AMIGABLES. Llámanse *amigables* entre si dos números tales cuyas partes alícuotas forman una suma igual.

Tales son 220 y 284; porque 220 es igual á la suma de las partes alícuotas de 284, á saber, 1, 2, 4, 71, 142; y recíprocamente 284 es igual á la suma de las partes alícuotas 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, del primero 220.

Se hallarán los números amigables por el siguiente método. Escríbanse, como lo hacemos abajo, los términos de la progresion geométrica doble empezando por 2; triplíquense cada uno de estos términos, y escríbanse los productos debajo de los números que han servido para formarlos: estos términos triples disminuidos en una unidad formarán una nueva serie 5, 11, 23, etc. que se colocará encima de la primera. En fin se obtendrán los terminos de la serie inferior 71, 287, etc. multiplicando cada uno de los términos de la serie 6, 12, 24, etc. por su precedente, y disminuyendo el producto en una unidad

5	11	23	47	95	191	283
2	4	8	16	32	64	128
6	12	24	48	96	192	384
	71	287	1151	4607	18431	73727.

Tómese un número de la serie inferior, por ejemplo 71, cuyo número correspondiente en la serie superior á saber 11, y el que precede á este último, á saber 5, sean como 71 en los números primos; multiplíquese 5 por 11 y el producto 55 por 4, término correspondiente de la progresion geométrica: el producto 220 será uno de los dos números buscados. El segundo se hallará multiplicando 71. por 4, lo que dará 284.

Del mismo modo con 1151, 47 y 23, que son números primos, se hallarán otros dos números amigables 17296 y 184162; pero 4607 no los dara, porqne de los otros dos números correspondientes 95 y 47, 95 no es primo. Sucede lo mismo con 18431. Pero 73727 da con 383 y 191 dos nuevos números amigables 9 396 584 y 9 347 056. Empleando los símbolos algebráicos, las series precedentes serán

$$\begin{array}{lllll} 2.3'-1, & 2^2.3-1, & 2^3.3-1, & 2^4\,3-1 & \text{etc.} \\ 2, & 2^2, & 2^3, & 2^4, & \text{etc.} \\ 2.3 & 2^2.3, & 2^3.3, & 2^{41}.3, & \text{etc.} \\ & 2^3.3^2-1, & 2^5.3^2-1, & 2^4.3^2-1 & \text{etc.} \end{array}$$

Si $2^{2n-1}.\,3^2-1.\,2^n.\,3-1$ y $2^{n-1}.3-1$ son nnmeros primos, los números

$$(2^{n-1})\cdot 3-1)\ (2^n.3-1)2^n \text{ y } (2^{2n-1}.3-1)2^n$$

serán amigables entre si,

No se conocen mas que estos tres pares de númenos amigables. Han sido hallados por Schoten, en sus ***Exercitaciones matemáticas, sect.*** 9. Este fué el que dió á estos números el nombre de amigables, aunque Descartes, Rudolff y otos se hayan ocupado de ellos antes que el.

DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NUMERALES. Tres números tales que el cuadrado del mayor equivalga á la suma de los cuadrados de los otros dos, es á lo que se llama *triánguto rectángulo*. Pueden servir de ejemplo los números 3, 4, 5.

$$\text{porque } 5^2 = 3^2 + 4^2$$

y 5, 12, 13, porque $13^2 = 5^2 + 12^2$.

Por las fórmulas siguientes se pueden hallar tantos triángulos rectángulos cuantos se quieran.

a siendo arbitraria, tómense

$2a+1$ y $2a(a+1)$ para los dos números menores, y

$$2a^2++12a$$

para el mayor,

Porque $4a^2(a+1)\ (2a+1)^3+(2a^2+2a+1)^2$.

O tambien, a y b siendo arbitrarios, los dos números menores serán $2ab$ y a^2-b^2, y el mayor será a^2+b^2. Porque

$$(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2$$

La "fórmula de que se valian los Pitagóricos, puede escribirse asi:

$$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

Platon determinaba los triángulos rectángulos en números, valiéndose de un método que puede expresarse por la ecuacion

$$a^2+\left(\frac{a^2}{1}-1\right)^2=\frac{a^2}{4}+1\Big)^2$$

Se puede tambien emplear la fórmula

$(4a^2+8a+3)^2+(4a+4)^2=(4a^2+8a+5)^2$ al lado mayor $4a^2+8a+3$ y la ***hipotenusa*** $4a^2+8a+5$, no solo se diferencian en dos unidades.

HECHOS CURIOSOS RELATIVOS Á LAS POTENCIAS DE LOS NÚMEROS.

Fermat ha demostrado que el área de un triángulo rectángulo en números enteros no puede ser igual á un cuadrado.

Se le debe tambien la proposicion importante de que es imposible dividir ninguna potencia mas allá de su cuadrado en dos partes que sean potencias de la misma especie. La suma de dos cubos no puede ser un cubo exacto; ni la suma de dos potencias cuartas una potencia cuarta etc.

Este teorema de Fermat es el único que no está completamente demostrado. Euler y Legendre han hallado demostraciones para las potencias 3 y 5; la que es relativa á la potencia 4 no es difícil. M. Lejeune-Dirichlet habiá dado una especial para la potencia 14; M. Lamé ha llegado á probarla para la potencia 7. Ademas hallada una vez la demostracion para una potencia, lo queda para todas las potencias múltiples; la tenemos pues para todas las potencias 3, 6, 9, 12, 15; 4, 8, 12, 16; 5, 10, 15, 20, 25; 7, 14, 21, 28, etc.

La suma de dos bi-cuadrados no puede ser un cuadrado.

La suma de un bi-cuadrado y del duplo de otro bi-cuadrado, no puede tampoco ser un cuadrado.

La suma ó la diferencia de dos cubos no puede ser el duplo de un cubo.

Ningun número triangular, esceptuando 1 puede ser igual á uu cubo ni á un bi-cuadrado.

Un número cualquiera puede formarse por la adicion de tres números triangulares; y por la de cuatro cuadrados, por la de cinco números pentágonos, por la de seis exágonos, y asi hasta lo infinito.

Para completar el sentido de este enunciado, es preciso tener presente que 0 puede entrar una ó muchas veces en la composicion de los números que consideremos, porque 0 forma parte de todas las series de números polígonos.

Esta proposicion es debida tambien al ilustre Fermat.

DE LOS CUADRADOS MÁGICOS. El primer autor que escrbió sobre este objeto fué Manuel Moscopulo griego del Bajo-Imperio que vivia en el siglo catorce.

Se llama *cuadrado mágico* á un cuadrado dividido en casillas iguales en los cuales se inscriben los términos de una progresion aritmética, de tal manera que la suma de cada lado sea vertical, sea horizontal, y de cada una de las diagonales sea siempre la misma.

Es probable que esta invencion tenga un orígen supersticioso. Agripa hace mencion de ella á propósito de los talismanes. M. de Loubere ha hallado extendido sn conocimiento en la India y principalmente en Surate, lo que parece indicar que es muy probable que nos haya venido de este páis, como nuestro sistema de numeracion.

Hay dos especies de cuadrados mágicos cuyo grado de dificultad es muy diferente. Unos son cuadrados impares, cuya raiz es impar, como 9, 25, 49, etc.; estos son los mas fáciles de arreglar. Entre los cuadrados pares se distinguen los parmente ó imparmente pares, segun que su raiz es divisible por 4 ó solamente por 2. El método que sirve para los unos es diferente del que exigen los otros.

Daremos solamente, como ejemplo, la regla hallada por Poignard, canónigo de Bruselas, para los cuadrados mágicos, y perfeccionada despues por el académico de la Hir.

Sea, por ejemplo, un cuadrado de raiz impar como 5; construido este cuadrado, coloquense en la primera línea horizontal de arriba los cinco primeros números de la progresíon en el órden que se quiera: tómense 1, 3, 5, 2, 4; elíjase en seguida un número primo con la raiz 5, y que disminuya de la unidad, no de la medida: supondremos 3; rázon por la cual se tomará la tercera cifra de esta serie desde donde se contará para llenar la segunda línea horizontal 5, 2. 4, 1, 3; en seguida se volverá á empezar por la tercera, comprendiendo tambien al 5, es decir por 4, lo que dará, para la tercera línea 4, 1. 3, 5, 2. Se obtendrá asi, siguiendo el mismo procedimiento, la serie de los números 3, 5, 2, 4, 1. con los que se llenará la línea cuarta; asi se continuará tomando siempre la tercera cifra y comprendiendo la precedente hasta que todo el cuadrado esté lleno.

Este cuadrado será uno de los componentes del cuadrado buscado y será mágico porque la suma de cada lado, seá horizontal, sea vertical, sea diagonal, es la misma, porque los cinco números de la progresion, están en cada una sin repeticion.

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

Haciendo un segundo cuadrado geométrico de 25. casillas, en cuya primera banda se coloquen los múltiplos de la raiz 5, empezando por cero, á saber 0, 5, 10, 15, 20, y en el órden que se quiera, por ejemplo 5, 0. 15, 10, 20; concluyendo de llenar el cuadrado siguiendo el mismo principio que arriba, teniendo no obstante en cuanta no tomar la misma cuarta para volver á comenzar continuamente.

5	0	15	10	20
10	20	5	0	15
0	15	10	20	5
20	5	0	15	10
15	10	20	5	0

Ahora, para obtener el cuadrado mágico buscado, basta inscribir en un tercer cuadrado de 25 casillas, la suma de los

números que se encuentran en las casillas correspondientes de los dos precedentes, por ejemplo 5+1 6. ó en la primera á la izquierda y á lo alto del cuadrado buscado; 0+3 ó 3 en la segunda etc. se obtendrá, por este procedimiento, el cuadrado siguiente de 25 casillas que será necesariamente mágico.

6	3	20	12	24
15	22	9	1	18
4	16	13	25	7
23	10	2	19	11
17	14	21	8	5

Se puede, por este medio, colocar el número que se quiera en la casilla que se desee, por ejemplo 1, en la casilla central: no hay mas que llenar la banda del medio con la serie de los números, de modo que 1, esté en el medio como se ve aqui, y asi se continuará llenando el cuadrado siguiendo el principio ya citado, comenzando de nuevo por la banda mas alta cuando se quiera llenar la mas baja

2	1	3	4	5
3	4	5	2	1
5	2	4	3	1
1	3	4	5	2
4	5	2	1	3

Para formar el segundo cuadrado, se colocará 0 en el centro, como se ve abajo, y se llenarán de la misma manera y cuidando de no tomar, al empezar las bandas, el mismo órden que para el primero.

20	5	10	0	15
0	15	20	5	10
5	10	0	15	20
15	20	5	10	0
10	0	15	20	5

En fin, se adicionarán en un tercer cuadrado, los casos semejantes, y se tendrá el siguiente cuadrado, en que 1. ocupará necesariamente el centro.

22	6	13	4	20
3	19	25	7	11
10	12	1	18	24
16	23	9	15	2
24	5	17	21	8

VII. ÁNALISIS INDETERMINADO DEL PRIMER GRADO.

Cuando un problema conduce á menos ecuaciones que incógnitas, admite una infinidad de soluciones algebráicas; sin embargo la naturaleza de la cuestion puede exigir que los valores de las incógnitas sean números enteros y positívos. El análisis indeterminado, tiene por objeto hallar las soluciones que satisfacen esta condicion.

Una ecuacion de primer grado de dos incógnitas, puede siempre reducirse á la forma $ax+by=c$

pendo a, b, c números positivos ó negativos que no tienen divisor comun.

Para que esta ecuacion pueda admitir dos soluciones comsiletas, es preciso que a y b sean primos entre si.

Supongamos que se reduce $\frac{b}{a}$ en fraccion continua, y representemos por $\frac{p}{q}$ la penúltima reducida.

Segun las propiedades conocidas de las fracciones continuas, tendremos

$$ap-bq=\pm 1.$$

Segun que la reducida $\frac{p}{q}$ es de órden par ó impar.

De aquí se deduce $apc-bqc=\pm c$.

Satisfaremos, pues, á la ecuacion dada en el primer caso, colocando

$$x=pc,\ y=-qc;$$

y en el segundo caso, colocando

$$x=-pc,\ y=qc.$$

Luego, cuando se conoce una solucion entera ($x=x'$, $y=y'$) de la ecuacion

$$ax+by=c$$

se pueden deducir todas las demas por medio de las fórmulas

$$x=x'\pm bt$$
$$y=y'\mp at$$

en las que t es un número entero cualquiera. Entre los sistemas de valores dados por estas fórmulas se podrán elegir las que son positivas.

§ VIII. *Potencias y raices de las cantidades algebráicas y numéricas.*

Para extraer la raiz m^{eme} de un monomio, es preciso extraer la raiz m^{eme} del coeficiente numérico y dividir el exponente de cada letra por m.

Asi $$\sqrt[3]{64a^3b^6}=4ab^2$$

Està regla, aplicada en su mayor generalidad conduce á la anotacion de los exponentes fraccionarios positivos y aun negativos, inventados por Descartes, y una de las mas espresivas del algebra.

Asi $$\sqrt[5]{32a^4b^6c}=2a^{\frac{4}{5}}\,b^{\frac{6}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}$$

En general

$$\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}=\sqrt[n]{a^p\,b^{-q}}=a^{\frac{p}{n}}\,b^{\frac{-q}{n}}$$

Las reglas de las operaciones que han de ejecutarse con los exponentes fraccionarios positivos y negativos son las mismas que para los exponentes enteros.

El producfo, el cociente, la elevacion á potencias y la extraccion de raices de radicales de un grado cualquiera, no ofrecen ninguna dificultad.

La extraccion de las raices de los polinomios está fundada en la fórmula del binomio de Newton.

Para extraer la raiz m^{eme} de un polinomio P, ordenésele con relacion á las potencias decrecientes ó crecientes de una letra. Tómese la raiz m^{eme} del primer término, y se tendrá el primer término de la raiz. Divídase el segundo término de P, por m veces la $(m-1)^{eme}$potencia del primer término de la raiz,

y se tendrá el segundo término de la misma. Rebájese de P la m^{eme} potencia de la suma de los dos términos hallados, y divídase el primer término de la resta R por m veces la $(m^{eme}-1$ potencia del primer término de la raiz, y se tendrá el tercer término; y asi de los demas.

Cuando el polinomio propuesto es una potencia m^{eme} exacta, estas operaciones conducen á una resta nula.

La extraccion de las raices de los números está fundada por otra parte tambien en la composicion de los dos primeros términos $x^m+mx^{m-1}a$ de la m^{eme} potencia del binomio, y se reduce con procedimientos análogos á los que se usan en aritmética para las raices cuadradas y cúbicas.

La fórmula del binomio de Newton es verdadera para los exponentes fraccionarios positivos ó negativos, lo mismo que para un exponente entero y positivo, y puede emplearse con gran ventaja, para la determinacion de las raices de lo números.

Si se quiere obtener, por ejemplo, la raiz cuadrada de 101, se toma el cuadrado 100 que es el mas próximo posible de 101, y se pone $101=100+1$, de donde

$$\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=(100+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego si en la fórmula del binomio, se hace $m=\frac{1}{2}$ se halla

$$(x+a)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{2x}-\frac{a^2}{8x^2}+\frac{a^3}{16x^3}-\frac{5a^4}{128x^4}+\frac{35a^5}{1280x^5}\right)-\text{etc.}$$

Aqui tendrémos á $x=100$, de donde $x^{\frac{1}{2}}=10$ y $\frac{a}{x}=0,01$

Luego $$\sqrt{101}=10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}+\frac{(0,01)^3}{16}-\frac{5(0,01)^4}{128}+\text{etc.}\right)$$

Si se quiere obtener esta raiz aproximada hasta 0,0001, basta tomar los tres primeros términos del desarrollo; porque el cuarto término $\dfrac{0,000001}{16}$ multiplicado por el coeficiente 10 solo produce 0,000000625, y los siguientes son aun menores.

Efectuando los cálculos se halla

$$\sqrt{101}=10,0499.$$

§ IX. *Del máximo comun divisor algebráico.*

Para obtener el máximo comun divisor de varios monomios, se busca el máximo comun divisor de los coeficientes numéricos, y se escribe á continuacion de este número cada letra comun á todos los monomios, dándole el menor exponente de que está afectada en los monomios.

Asi el máximo comun divisor de las cantidades $432a^4b^2x^2$, $270a^2b^3x^2$, $90a^3bx^3$, es $18a^2bx^2$.

Para hallar el máximo comun divisor de dos polinomios que no contengan mas que una sola letra x, se comienza por buscar el máximo divisor monomio comun á todos sus términos, y se suprime este factor en los dos polinomios.

Sean A y B los dos polinomios asi simplificados; se supone que el grado de B no excede al de A y que están los dos ordenados con relacion á las potencias decrecientes de x.

Se divide sucesivamente A por B, B por la primera resta, esta por la segunda y asi de las demas.

Para hacer enteros los coeficientes numéricos de diversos términos de cocientes sucesivos, se multiplica cada dividendo parcial por un número tal, que el coeficiente del primer término de este dividendo contenga exactamente el primer término del divisor correspondiente.

Se suprime en las restas sucesivas los factores monomios, si los hubiere.

Continuando asi, se llega siempre á una resta independiente de x. Si esta resta es nula el último divisor empleado es el máximo comun divisor pedido. Si la resta no es nula, los polinomios A y B no tienen factor comun.

Aplicando esta regla á los polinomios

$$3x^5-10x^3+15x+8, \text{ y}$$
$$x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6$$

se hallará x^3+3x^2+3x+1, por máximo comun divisor.

Supongamos ahora dos polinomios M y N que contengan dos letras x é y, que no tienen factores monomios.

Ordénanse con relacion á las potencias decrecientes de una de las dos letras, de x por ejemplo: los coeficientes de x pueden ser polinomios; pero no contienen mas que una sola letra y.

Sea a el máximo comun divisor de los coeficientes de diversas potencias de x en M, b el de los coeficientes de las potencias de x en N, y d el máximo comun divisor de a y de b. a, b, d son fáciles de hallar segun las reglas precedentes.

Dividiendo M por a, N por b se obtendran los cocientes enteros A y B y se tendrá

$$M=a\times A,\ N=b\times B.$$

Bastará determinar el mayor comun divisor D de los polinomios A y B que no tienen factores independientes de x. Se obtendrá el máximo comun divisor de los polinomios M y N multiplicando D por d.

Se aplicará á los polinomios A y B lo que se ha dicho relativamente á dos polinomios que no contengan mas que una sola letra, teniendo cuidado de notar que en lugar de coeficientes y de factores numéricos, se pueden introducir y suprimir los factores algebráicos que pueden ser polinomios en y.

Se elevará de la misma manera en el caso en que los polinomios contengan 3, 4, 5, 6 letras y asi de los demas.

§ X. *Propiedades principales de las funciones derivadas.*

Cuando en el polinomio
$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t$, que para abreviar se puede designar por $f(x)$ *funcion de* x) se remplaza x por $x+h$ y se ordena el resultado, desarrollado segun la fórmula del binomio, con relacion á las potencias crecientes de h se obtiene

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\ 2}f''(x)$$

$$+\frac{h^3}{1.2\ 3}f'''(x)+\ldots+h^m,$$

$f(x)$ es el polinomio dado.
$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ son las *funciones derivadas sucesivas* ó simplemente las *derivadas sucesivas* de este polinomio.

Sus valores son:

$$f'(x)=mx^{m-1}+a(m-1)x^{m-2}+\ldots.+2rx+s$$

$$f''(x)=m(m-1)x^{m-2}$$

$$+a(m-1)(m-2)x^{m-3}+\ldots+2r.$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3}+\text{etc.}$$

. . . .

$$f^{(m)}(x=m)(m-1)(m-2)\ldots3.2.1.$$

Cada unas de ellas deriva pues de la precedente en virtud de una ley constante.

La derivada del primer órden $f'(x)$ de una funcion entera de una variable, expresa el límite de la relacion del aumento de la funcion al aumento de la variable.

Si se hace crecer x por grados insensibles entre dos límites a y b, la funcion $f(x)$ irá creciendo tanto como la derivada $f'(x)$ conserve un valor positivo; y cuando la derivada sea negativa, la funcion irá decreciendo.

De aqui se ha deducido que la derivada $f'(x)$ es nula para todo el valor a de x que corresponde á un *máximum* ó á un *mínimum* de $f'(x)$. En el caso del máximun el resultado de la sustitucion de a en lugar de x en $f''(x)$ es negativo; este resultado es positivo en el caso del minimum.

En general, si la primera de las derivadas sucesivas que no queda reducida á cero por la sustitucion de x en lugar de a, es del órden par, $f(x)$ es un máximum ó un mínimum para este mismo valor $x=a$, segun que esta derivada es negativa ó positiva. Si la primera derivada no anulada por la hipótesis $x=a$, es de órden impar, no habrá ni máximum ni mínimum.

§ XI. *Elimitacion. Ecuacion por diferencias.*

Eliminar incógnitas es deducir de un sistema de ecuaciones que encierra estas incógnitas con varias otras, otro sistema de ecuaciones que ya no las contiene.

Cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas, la eliminacion de todas las incógnitas menos una, conduce generalmeute á una *ecuacion final* de una sola incógnita, ecuacion cuyo grado es á lo mas igual al producto de los grados de ecuaciones compuestas.

Consideraremos solamente el caso de dos ecuaciones de dos incógnitas.

Si una de las ecuaciones no contiene una de las incógnitas x, sino en el primero ó segundo grado, se resolverá esta ecuacion con relacion á x, considerando aqui á y como una cantidad conocida, y se sustituirá el valor de x en funcion de y en la otra ecuacion. Se llegará asi á una ecuacion que no contendrá mas que y. La reduccion de esta última ecuacion hará conocer los valores de y, y se obtendran los valores correspondientes de x, sustituyeudo sucesivamente cada valor de y en el de x que está expresado en la funcion de y.

En general, si se tienen dos ecuaciones numéricas de cualquier grado entre dos incógnitas, para obtener los valores de y que convienen á las ecuaciones propuestas, se busca el máximo comun divisor entre estas dos ecuaciones; se iguala separadamente á cero la resta independiente de x asi como cada uno de los factores en y que hemos suprimido en el curso del cálculo, y se resuelve separadamente cada una de estas ecuaciones.

Entre los valores que obtendremos de este modo, se podrán hallar valores extraños, que deberán despreciarse. Pero los detalles relativos á la separacion de estas dos especies de valores haria demasiado extenso este tratado.

Los procedimientos de la eliminacion se emplean útilmente para el cálculo de uaa ecuacion en que todas las raices son la diferencia entre cada una de las raices de una ecuacion propuesta y de todas las demas.

Esta ecuacion, que lleva el nombre de *ecuacion por diferencias*, se obtiene eliminando x entre las dos ecuaciones.

$$f(x)=0 \text{ y}$$

$$f'(x)+\frac{y}{1.2}f''(x)+\frac{y^2}{1.2.3.}f'''(x)+\ldots\text{etc}=0.$$

Si la ecuacion propuesta es del grado m, la ecuacion por diferencias del grado $m\ (m-1)$; no contiene mas que potencias pares de y, y si se remplaza y^2 por z toma el nombre de *ecuacion de cuadrados por diferencias*.

Para obtener una cantidad menor que la mas pequeña diferencia entre las raices de una ecuacion dada, basta buscar la raiz cuadrada del límite inferior de las raices positivas de la ecuacion de cuadrados por diferencias.

Cuando la ecuacion de cuadrados por diferencias, no tiene mas que variaciones de signos, la ecuacion propuesta tiene todas sus raices reales; cuando la primera tiene permanencias, la segunda tiene raices imaginarias; y el número de pares de raices imaginarias de la propuesta, no puede exceder el número de permanencias en la ecuacion de cuadrados por diferencias.

§ XII. *Propiedades generales de las ecuaciones en todos grados.*

RAICES DE LAS ECUACIONES. Toda ecuacion del grado m y de una sola incógnita puede extenderse bajo la forma

$$(1)x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t=0.$$

Siendo a, b... r, s, t números enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos.

Si sustituyendo uno despues de otro, en el primer miembro de esta ecuacion, dos valores reales y acabados por x, $x=A$ y $x=B$, se obtienen resultados de signos contrarios, la ecuacion tendrá al menos una raiz real, comprendida entre A y B.

Toda ecuacion de grado impar, admite á lo menos una raiz real de signo contrario ó de signo de su último término; y toda ecuacion de grado par cuyo último término es negativo, admite á lo menos dos raices reales, la una positiva y la otra negativa.

Cuando los términos de la ecuacion (1) tienen todas el mismo signo, esta ecuacion no tiene raiz positiva.

Cuando una ecuacion es completa, y sus términos son alternativamente positivos y negativos no tiene raiz negativa.

Cuando una ecuacion no tiene mas que potencias pares de la incógnita, todas las raices tienen de dos en dos el mismo valor numérico con signos contrarios y recíprocamente.

DESCOMPOSICION DE LAS ECUACIONES EN FACTORES. Si A es una raiz de la ecuacion, el primer miembro de esta ecuacion es divisible por el binomio $x-A$, y recíprocamente.

En general, la resta de la division del polinomio que forma el primer número de la ecuacion, por el binomio $x-A$, es igual al valor que toma este polinomio cuando se remplaza en él x por A.

Toda ecuacion del grado m admite m raices reales ó imaginarias, y no puede admitir mas; ó en otros términos, el primer miembro de la ecuacion de arriba, es descomponible de una sola manera en m factores binomios de primer grado, tales como

$$x-A,\ x-B \text{ etc.}$$

Toda ecuacion de grado par, en que los coeficientes son cantidades reales, puede siempre descompenerse en m factores reales de segundo grado; y esto de $\frac{m(m-1)}{1.2}$ maneras diferentes.

El número de divisores del tercer grado es

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\quad 2\quad 3}$$

El número de divisores del grado n es

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\quad 2\quad 3\ldots n}$$

y el número total de todos los divisores será

$$2^m-1.$$

En toda ecuacion conducida á la forma (1) el coeficiente del segundo término, puesto con signo contrario, es igual á la suma de las raices.

El coeficiente del tercer término es la suma de los productos dos á dos de las raices.

El coeficiente del cuarto término tomado con signo contrario, es igual á la suma de los productos tres á tres de las raices; y asi de los demas.

En fin, el último término, puesto con su signo ó con un

signo contrario, segun que el grado de la ecuacion es par ó ímpar, es igual al producto de todas las raices.

TRANSFORMACION DE LAS RAICES DE LAS ECUACIONES. Sin conocer las raices de una ecuacion, podemos hacerlas experimentar diversas transformaciones, que hacen muchas veces mas fácil su determinacion.

Para aumentar en una misma cantidad h todas las raices de la ecuacion (1), se reemplazará x por $y-h$, y todas las raices de la transformada en y escederán de h las raices de la propuesta.

Esta transformacion sirve para hacer desaparecer el segundo término de una ecuacion. Basta para esto remplazar x por $y-\frac{a}{m}$.

Para transformar la ecuacion (1) en otra cuyas raices sean iguales á las de la propuesta tomadas con signos contrarios, debe reemplazarse x por $-y$.

La transformacion por multiplicacion de las raices se opera poniendo $x=\frac{y}{h}$.

La transformada, multiplicando todo por h^m será

$$y^m+ahx^{m-1}+bh^2x^{m-2}+\ldots+sh^{m-1}x+th^m=0.$$

Tomando para h el mas pequeño número posible que hace enteros todos los coeficientes de la transformada, esta gozará de la propiedad de no tener mas que números enteros para raices comensurables.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES. Se dice que hay una *permanencia* cuando dos términos próximos en una ecuacion tienen el mismo signo; en el caso contrario, hay una *variacion*.

En toda ecuacion el número de raices positivas no puede exceder al número de variaciones de signos; y el número de raices negativas no puede exceder al número de variaciones de la transformada que se obtiene cambiando x en $-x$.

En una ecuacion completa, el número de raices negativas, es á lo mas, igual al número de permanencias.

En una ecuacion completa que tenga todas sus raices reales, el número de raices positivas es igual al número de variaciones, y el número de raices negativas es igual al número de permanencias.

Siempre que falte un término entre dos términos del mismo signo, si la ecuacion fiene por lo menos dos raices imaginarias.

LÍMITES DE LAS RAICES. Siendo K el mayor coeficiente de la ecuacion (1); $K+1$ y $-(K+1)$ son respectivamente los límites superiores de las raices positivas y negativas de esta ecuacion.

Pero se puede muchas veces obtener límites mas aproximados. Siendo N el valor absoluto del mayor de los coeficientes negativos, $N+1$ será un límite superior de raices positivas.

Cuando el primer término negativo $-Kx^{m-n}$ está separado del primer ténmino x^m de la ecuacion por $n-1$ términos positivos: $1+\sqrt[n]{N}$ será un límite aun mas aproximado de reces positivas; N designa siempre el mayor de los coeficientes negativos.

El límite superior de valores absolutos de raices negativas se obtiene cambiando x en $-x$ en la ecuacion propuesta, y tomando en la transformada, el límite superior de las raices positivas.

Para límite inferior de raices positivas, se toma el valor absoluto del mayor coeficiente de signo contrario al último término, y se le divide por la suma de este coeficiente y del último término.

El límite inferior de las raices negativas, es el límite inferior de las raices positivas de la transformada que se obtiene remplazando x por $-x$ en la propuesta.

Cuando dos números sustituidos en el primer miembro de una ecuacion dan los resultados de signos contrarios, comprenden un número impar de raices reales de esta ecuacion; y cuando dos números dan dos resultados del mismo signo, no comprenden ninguna raiz ó comprenden un número par de raices.

TEOREMA DE STURM. Sea $V=0$ una ecuacion de un grado cualquiera en que todas las raices sean desiguales, y sea V' la funcion derivada de V; ejecútese como si se tratará de hallar el máximo comun divisor entre V y V', con la sola diferencia que se le cambiará los signos de todas las restas á medida que servirán de divisores: sean V'', V'''. ....estas restas consecutivas cuyos signos se han cambiado y se han llevado hasta una resta numérica $V,^{(r)}$ se tendrá la proposicion siguente.

Cuando se sustituye en lugar de x en la serie de funciones $V, V', V'', V'''...V^{(r)}$, dos números cualesquiera a y b positivos ó negativos, si a es menor que b, el número de raices reales de la ecuacion $V=0$ comprendidas entre a y b, es igual al exceso del número de variaciones contenidas en la serie de los signos de las funciones $V, V', V'', V'''...V^{(r)}$ por $x=a$ en el número de variaciones de sus signos por $x=b$.

§ XIII. *Resolucion de las ecuaciones numéricas de un grado cualquiera de una sola incógnita.*

HALLAR RAICES COMENSURABLES IGUALES Ó DESIGUALES. Comiéncese por reducir la ecuacion á la forma (1)

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+...+sx+t=0$$

multiplicando las raices por una cantidad h tal que todos los coeficientes se conviertan en números enteros a, b, c etc. Las raices comensurables serán números enteros.

Tómense los límites superiores de las raices positivas y negativas de la ecuacion.

Escríbanse en una misma línea horizontal todos los divisores del último término comprendido entre estos límites, por órden de magnitud, y tanto con el signo $+$ como con el signo $-$.

Escríbanse debajo los cocientes del último término por cada uno de estos divisores, añadiendo con su signo el coeficiente del término en x, despreciando todos los coeficientes que no son números enteros.

La tercera línea está formada de los cocientes de los números de la línea precedente por los divisores correspondientes, cocientes á los que se añade el coeficiente del término en x^2, despreciando siempre los que no son enteros.

Continúese del mismo modo hasta que se hayan agotado todos los términos de la ecuacion; hasta, y comprendido el segundo.

Estos divisores que habrán dado cocientes iguales á -1 en la última línea de la operacion, serán las raices reales comensurables, y serán las únicas.

Los divisores $+1$ y -1 no se someten ordinariamente á estas operaciones, porque es mas sencillo averiguar directamente si corresponden á la ecuacion propuesta.

Se limitan tambien las operaciones no buscando las raices enteras, mas que entre los divisores del último término, que aumentadas con 1, dividen el resultado de la sustitucion de -1 en lugar de x en el primer miembro de la ecuacion propuesta, y que disminuidos de 1, dividen el resultado de la sustitucion de $+1$ en lugar de x.

Cuando se han hallado diversas raices comensurables x' x' x''',.. se divide el primer miembro de la ecuacion por el producto de los factores $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$... que corresponden á estas raices. Igualado el cociente á cero determina todas las demas raices.

Luego, si la propuesta tiene raices comensurables iguales, la nueva ecuacion admitirá aun raices comensurables. Para determinarlas, bastará ensayar la sustitucion directa de x', x'', x'''. Se puede tambien sustituir cada una de las raices en las derivadas sucesivas del primer miembro de la ecuacion propuesta: el grado de mltiplicidad de la raiz está marcado por el órden de la primera derivada que no resulta nula por esta sustitucion.

HALLAR RAICES INCOMENSURABLES IGUALES. Cuando el primer miembro de la ecuacion se ha dividido por el producto de los factores binomios que corresponden á las raices iguales ó des-

iguales, el cociente igual á cero dá una nueva ecuacion $f(x)=0$, cuyas raices reales son todas incomensurables.

Pero esta ecuacion puede tener raices incomensurables iguales.

Para hallarlas se buscan sucesivamente los máximos comunes divisores D, entre $f(x)$ y su derivada $f'(x)$, D′ entre D y su derivada, D″ entre D′ y su derivada.

Continuando estos cálculos, se obtiene siempre un polinomio que es *primo* con su derivada. Supongamos que D″ sea este polinomio.

Se dividirán cada una de las funciones $f(x)$, D, D′.... por la siguiente, lo que dará los cocientes sucesivos Q, Q′. Q″.....

Se dividirán del mismo modo cada uno de estos cocientes sucesivos por el siguiente, y el último Q″ por D″, lo que dará nuevas funciones de x.

$$q, q', q'',$$

Se tendrán entonces las ecuaciones

$$q=0,\ q'=0,\ q''=0,\ D''=0$$

y cada una de ellas tendrá solo raices desiguales.

La primera dará todas las raices sencillas de la propuesta $f(x)=0$; la segunda dará las demas raices dobles; la tercera las raices triples, y asi de las demas.

Una ecuacion de tercer grado, cuyos coeficientes son comensurables, y que no tiene raices comensurables, tiene todas sus raices desiguales.

Una ecuacion de cuarto grado, cuyos coeficientes son comensurables, no puede tener raices incomensurables iguales, sino cuando tiene dos raices dobles, en cuyo caso se puede reducir la ecuacion propnesta á una ecuacion de segundo grado, extrayendo la raiz cuadrada del primer miembro.

HALLAR LAS RAICES INCOMENSUABLES DESIGUALES POR EL MÉTODO DE M. STURM. Sea V=0 la euacion propuesta que no contenga mas que raices incomensurables desiguales. Sea V′ la funcion derivada de V, y sean $-V''$, $-V'''$,.., $-V^{(r)}$, las restas consecutivas que se obtienen al buscar el máximo comun divisor entre V, y V', entre V' y V'', y asi de las demas siendo un número $V^{(r)}$.

Designemos por x el conjunto de todas las funciones V, V', V'',... $V^{(r)}$, y por a ol conjunto de los resultados que se obtienen sustituyendo a en lugar de x.

Se darán sucesivamente á x los valores 0, 10, 100, 1000, y se anotará el exceso de los números de variaciones de signos contenidas en cada una de las séries (10), (100), (1000), en los números de las variaciones de signos de la serie precedente: estos excesos serán iguales respectivamente á los números de raices positivas comprendidas entre cero y 1, entre 10 y 100, entre 100 y 1000, etc.

Si hay raices entre 1 y 10, se determinará la parte entera de cada una sustituyendo los números 1, 2, 3, hasta 10; si hay raices entre 10, y 100, la cifra de las decenas de cada una se conocerá por la sustitucion de los números 10, 20, 30 hasta 100, y asi de los demas. Del mismo modo, para las raices menores que 1, se conocerá la cifra decimal del órden mas próximo á la coma, sustituyendo los números 0, 1, á 1, ó bien de 0, á 01 á 0, 1 etc.

Procediendo de esta manera se obtiene la cifra del órden mas elevado contenido en cada raiz. Para obtener la del órden inmediatamente inferior, por ejemplo, la cifra de las decenas despues de haber hallado las raices comprendidas entre 300 y 400, se cambia x en $300+x'$, lo que produce una nueva serie (x') en la que no hay mas que sustituir los números 0, 10, 20, para reconocerlos que comprenden las raices. Si se ha hallado 5 para la cifra de las decenas, se remplazará x' por $50+x''$ en la serie (x'), y se tendrá una serie (x''), en la que no habrá mas que sustituir los números 0, 1, 2, 3,... para saber cual es la cifra de las unidades.

Se pueden continuar estos cálculos para conocer sucesivamente las décimas, las centesimas, etc. y se llega por esta via á calcular las raices con tanta aproximacion como se quiera.

El principio de M. Sturm puede servir tambien para obtener las raices bajo la forma de fraccion continua. Despues de haber reconocido que hay raices entre dos números positi-

vos enteros consecutivos a y $a+1$. Se pondrá $x=a+\frac{1}{x'}$ en la série (x) lo que dará una nueva série (x'), en medio de las que se hallarán las partes enteras de los valores de x' que son mayores que la unidad. Sea b una de estas partes enteras, se pondrá $x'=b+\frac{1}{x''}$ en la serie (x'), lo que dará una nueva serie (x''), que servirá para calcular las partes enteras de los valores de x''. Continúese de esta manera tanto como se crea conveniente. Para la facilidad del cálculo, se pondrá en cada funcion de las séries (x'), (x'')... reducir todos los términos al mismo denominador, sin tener en cuenta este denominador, mientras sea positivo.

No hemos hablado de las raices negativas porque se obtienen reemplazando x en $-x$.

Método de Newton. Cuando se ha obtenido el primer valor aproximado de una raiz de una ecuacion, el método de Newton conduce muchas veces muy rápidamente á una aproximacion notable.

Si se da, por ejemplo, el primer valor aproximado a para la ecuación $f(x)=0$, hasta 0,1 se calcula $\frac{f(a)}{f'(a)}$ hasta 0,01, y se añade este valor al de a, lo que da una seunda aproximacion a'.

Se calcula $\frac{f(a')}{f'(a')}$ hasta 0,0001, y se añade el resultado á a' lo que da una segunda aproximacion a'', y asi de los demas.

Pero el método de Newton no es infalible, porque los resultados que dá en lugar de acercarse siempre el valor real de la raiz, se van algunas veces alejando.

MÉTODO DE LAGRANGE. Búsquese el limite inferior l de las raices positivas de ia ecuacion de los cuadrados por diferencias de las raices de la propuesta. Tómese un número racional d, el mas aproximado posible é inferior á $\sqrt{l}$; si d es menor que la unidad, hágase en la ecuacion propuesta $x=dx'$ y sustitúyanse en la transformada los números 0, 1, 2, 3, 4. Los resultados de la sustitucion de dos números enteros consecutivos a y $a+1$, que serán de signos contrarios, corresponderán á un solo valor de x', comprendida entre estos números enteros.

Póngase $x=a+\frac{1}{y}$, y se tendrá una transformada en y, que no tendrá mas que una sola raiz real mayor que la unidad. Sustituyase 2, 3. 4.., en lugar de y hasta que se llegue á un número que da un resultado positivo, y el número entero inmediatamente inferior será la parte entera de y.

Conociendo esta parte entera b, se pone $y=b+\frac{1}{z}$, lo que dá una segunda transformada en z, en la que se opera como en la precedente.

Continuando asi, se obtiene x bajo la forma de una fraccion contiuua.

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$$

que podemos llevar hasta donde queramos, y que dá tanta aproximacion como se pretenda.

§ XIV. *Resolucion de las ecuaciones de grado superior ó segundo. algebráicas.*

Los geómetras han llegado á hallar fórmulas que expresan por un número limitado de operaciones los valores algebráicos de las raices de las ecuaciones de tercero y cuatro grado de una sola incógnita; pero, al partir del tercer grado estas expresiones no pueden considerarse mas que como símbolos curiosos, que no tienen ninguna utilidad para la determinacion de los valores reales de las incógnitas.

Todos los esfuerzos de los mas hábiles geómetras se han estrellado coutra las ecuaciones algebráicas de grado superior al cuarto. Está al mismo tiempo probado en la actualidad, que es imposible expresar algebráicamente las raices de estas ecuaciones por un número limitado de operaciones efectuadas en los coeficientes. No se considera como una solucion del problema las interesantes séries que Lagrange ha dado para los valores de las raices, porque estas séries son generalmente divergentes. y contienen un número infinito de términos.

REDUCCION DE LAS ECUACIONES. Hay sin embargo ciertas clases de ecuaciones algebráicas cuyo grado puede disminuirse, por consecuencia de circunstancias particulares, y cuya resolucion puede asi conducirse á una ecuacion de grado inferior.

En general la disminucion tiene lugar, cuando se obtiene entre las incógnitas de un problema posible mas ecuaciones que incógnitas, lo que sucede muchas veces considerando el problema propuesto bajo diversas faces; se hallan entonces entre una misma incógnita dos ecuaciones finales de una misma clase quetienen un divisor comun, del que se deduce la solucion mas sencilla de que es susceptible el problema.

El caso en que una ecuacion tiene raices iguales, puede mirarse como uno de los de reduccion mas notables.

ECUACIONES RECÍPROCAS. Se llama asi toda ecuacion que no varía aunque en ella se reemplace x por $\frac{1}{x}$.

Para que una ecuacion de grado par sea recíproca, es preciso y basta, si el término del centro no falta, que los coeficientes igualmente equidistantes de los extremos sean iguales; y si falta el término del centro, que los coeficientes equidistantes de los extremos sean iguales con signos centrarios.

La segunda de estas ecuaciones admite las raices $+1$ y -1; y la supresion del factor del segundo grado correspondiente á estas raices, debe conducir á una ecuacion de la misma forma que la primera.

Para que una ecuacion de grado impar sea reciproca, es menester y basta que los coeficientes á igual distancia de los extremos sean iguales, ó que tengan de dos en dos el mismo valor numérico con signos contrarios.

La primera de estas ecuaciones tiene por raiz -1, y la supresion del factor correspondiente $x+1$ conduce á una ecuacion recíproca de grado par, en la que no falta el término del centro. La segunda de estas ecuaciones admite la raiz $+1$; y suprimiendo el factor $x-1$ se obtiene una ecuacion recíproca de grado par, teniendo tambien el término del centro,

Falta pues considerar la ecucion de grado par, cuyo término del centro no falta, y que no tiene por raiz ni $+1$, ni -1.

Esta ecuacion, del grado $2n$ puede ponerse bajo la forma

$$\left.\begin{array}{l}\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)+A\left(x^{n-1}+\dfrac{1}{x^{n-1}}\right)+\ldots \\ +F\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+G\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+H\end{array}\right\}=0.$$

Luego, si se pone $x+\dfrac{1}{x}=z$, se tendrá

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z \text{ etc.},$$

y sustituyendo estos valores de x en z, se llegará á una ecuacion del grado n.

Ecuaciones binomias. Se llama una asi toda ecuacion de la forma $x^m\pm A=0$. Poniendo $x=ay$, se transformará esta ecuacion en $y^m\pm 1=0$,

Si m es un número ímpar $2n+1$ y que se toma el signo inferior, se llegará á considerar la ecuacion

$$y^{2n+1}-1=0;$$

esta ecuacion admite una raiz igual á 1, y dividiéndola por el factor $y-1$ correspondiente á esta raiz, se obtiene la ecuacion recíproca de grado par

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+\ldots+y^2+y+1=0$$

que no tiene raices imaginarias, pero que puede ser reducida

á una ecuacion del grado n, poniendo $y+\dfrac{1}{y}=z$.

Si se hubiere tomado el signo superior, se tendria la ecuacion

$$y^{2n+1}+1=0$$

cuyas raices difieren únicamente por el signo de las de la primera ecuacion.

Supongamos ahora m par é igual á $2n$.

La ecuacion primitiva viene á ser, considerando desde luego el signo inferior,

$$y^{2n}-1=0.$$

Esta admite las raices $+1$ y -1; diviendo por y^2-1, se obtiene la ecuacion recíproca del grado par

$$y^{2n-2}+y^{2n-4}+y^{2n-6}+\ldots+y^4+y^2+1=0.$$

cuyas raices son todas imaginarias, y que puede ser conducida á una ecuacion de un grado la mitad menor.

En fin, la ecuacion

$$y^{2n}+1=0$$

no admite mas que raices imaginarias. Puede conducirse á la resolucion de las ecuaciones

$$y^n-1=0,\ y^n+1=0.$$

ECUACIONES TRINOMIAS. Para resolver una ecuacion trinomia de la forma

$$x^{2m}+px^m+q=0$$

se pone $x^m=y$, de donde

$$\sqrt{y^2+py+q=0}.$$

Si a y b son las dos raices de esta última, los valores de x dependen de dos ecuaciones binomias

$$x^m=a,\ x^m=b.$$

§ XV. *Solucion de problemas.*

La solucion de los problemas se compone de dos partes, á saber: 1.ª plantear en ecuaciones el problema propuesto; 2.ª resolver las ecuaciones á que nos ha conducido el problema.

La primera parte no está sometida á ninguna regla bien fija. Ya el enunciado del problema produce en el instante las ecuaciones, ya se halla uno obligado á desentrañar en el enunciado las condiciones que pueden conducirnos á fórmulas; ya en fin no son las mismas condiciones del enunciado las que es preciso traducir algebráicamente, sino las condiciones que pueden mirarse como la consecuencia de las primeras. M,

Lacrois ha dado con este motivo el precepto siguiente cuya aplicacion bien entendida, conduce siempre á hallar las ecuaciones:

«Mírese, dice, el problema como resuelto é indíquense por «medio de signos algebráicos en las cantidades conocidas, ya «por números, ya por letras, y en las desconocidas, siempre «representadas por letras, los mismos raciocinios y las mis«mas operaciones, que seria necesario efectuar para hallar los «valores de las incógnitas, si estos valores se nos hubisen «dado.»

La segunda parte de la resolucion de los problemas, es decir la resolucion de las ecuaciones á que nos han conducido, queda expuesta en los párrafos precedentes.

Es importante notar que los diversos métodos dados para la resolucion de las ecuaciones pueden conducir á valores negativos para las incógnitas. Estos valores satisfacen siempre bien á las ecuaciones, pero pueden no convenir al problema tal cual se ha propuesto.

En los problemas de primer grado todo valor negativo hallado para la incógnita, indica un vicio en el sentido de las condiciónes del enunciado, ó al menos en una de las ecuaciones que le sirve de traduccion algebráica. Este valor, hecha abtraccion de sn signo, puede mirarse como la respuesta de un problema cuyo enunciado difiere únicamente del problema propuesto, en que ciertas cantidades se han convertido de adicion en sustraccion y recíprocamente.

Cuando el vicio existe en una ecuacion y no en el euunciado del problema, las solucianes negativas dan á conocer las verdaderas condiciones del problema.

METODO PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA.

La enseñanza del Algebra no ha penetrado aun en nuestras escuelas. Así el método que debe seguirse en ella no ha recibido la sancion de la experiencia. De entre los conocidos en teoría, al menos en España, el que contiene mas luminosos principios y de mejor aplicacion es el de Jacotodt. De él vamos á tomar las indicaciones que nos parezcan mas adecuadas, modificándolas segun nuestro criterio nos lo indique.

«Ante todo, deben leerse atentamente las explicaciones acerca del cálculo algebráico, á fin de familiarizarse con el lenguaje convencional del álgebra, comparándolo al propio tiempo con el de la aritmética, que ya conocemos.

Se dice, por ejemplo, que para multiplicar la cantidad $x+3$ por 6, se multiplica sucesivamente x y 3 por 6, y que se obtiene por resultado: $6\,x+18$. Aquí se hace advertir la manera de indicar la multiplicacion de 6 por x, lo que se verifica colocando la cifra antes de la letra, y se procura que se reconozca que el espíritu de la multiplicacion es el mismo que en la aritmética. Lo mismo sucede en la adicion de $10\,x$ y $19\,x$, pues que se reunen cantidades de la misma naturaleza.

Continuando la lectura, se verá que para reducir al mismo denominador las cantidades algebráicas, sean enteros ó fracciones, se sigue un procedimiento igual que con los números. La única diferencia consiste en que como se opera con letras, los resultados se expresan por medio de fórmulas que indican las operaciones que deben ejecutarse en todos los casos análogos; mientras que en la aritmética no queda en el resultado vestigio alguno de la marcha seguida para obtenerlo.

Idéntico procedimiento se sigue en las demas explicaciones.

Luego se hace copiar la leccion del dia. Así se consigue grande exactitud en la escritura de los signos y letras que entran en las operaciones, y el prevenir toda especie de distraccion.

Hay ademas en esto la ventaja de repetir las lecciones textualmente, sin variacion alguna en las palabras, de que resulta que los discípulos de poca memoria adelantan mas con estas cortas explicaciones bien aprendidas, que recitando mal páginas enteras. No hay motivo para quejarse de la lentitud con que es preciso caminar en los principios, ni para temer por los adelantamientos sucesivos; porque la memoria no marcha por grados; y como no se juzga de ella sino por los efectos, solo se trata de fortificarla empleando ejercicios convenientes. Discípulos habrá que á fuerza de gran trabajo no conseguirán retener sino algunos renglones ó algunas palabras de una leccion, y por este medio tendrán pronto aptitud para aprender en igual tiempo páginas enteras.

Aprendida de memoria la leccion por este ú otro medio, se hace repetir cuantas veces sea posible, pues que de la repeticion depende principalmente el resultado.

Cuando los alumnos á quienes se enseña son muchos, para economizar tiempo y para estímulo, la repeticion es en comun, estando presentes todos los discípulos. Empieza uno, y todos deben estar dispuestos á continuar á una señal del profesor. Así, este ejercicio sirve tambien de exámen ó comprobacion de lo que sabe cada uno

Despues, y sin abandonar estas prácticas, se trata de que los niños entiendan bien la leccion, insistiendo mucho en esto hasta que no quede duda alguna.

En cada *hecho* hay mucho que aprender; es preciso mucha atencion para no confundir las cosas, y repetir con frecuencia para no olvidar nada; de consiguiente, conviene no marchar con demasiada prisa en los principios y desconfiar de la preocupacion de que lo que se sabe sea un gran peso para la memoria.

La atencion y la memoria de los niños, se comprueba valiéndose de preguntas, cuya respuesta se halla en el texto. Ejemplos:

P. ¿Qué es problema?

R. Una proposicion en la cual, por medio de ciertas cantidades dadas, se encuentran otras que se buscan.

(El discípulo comprueba lo que dice refiriéndose á la leccion que sabe.)

P. ¿Cómo se forma una ecuacion?
R. Por medio de dos expresiones equivalentes de la misma cantidad.
P. ¿Cuál es la regla general para resolver una ecuacion?
P. ¿Será el mismo el valor de x si el correo que sale del punto A se pone el primero ó el último en marcha?
P. ¿A qué se llama *descomponer* en *factores*, *invertir*, etc.?

Y así sucesivamente, puesto que cada palabra puede dar lugar á una pregunta. Conviene tambien referir siempre á la aritmética todo lo que se aprenda.

El mismo órden debe seguirse en el estudio de todas las lecciones; pero una vez bien sabida la primera, da principio la lectura de un libro de álgebra simultáneamente con los ejercicios de memoria.

Empieza la lectura desde los preliminares, deteniéndose en todos los detalles y sin omitir cálculo alguno de los que contenga el libro. Esto es esencial, y por mas que se sepa una cosa debe repetirse muchas veces, porque siempre puede enseñornos cosas nuevas. Por eso sentamos como regla general, que deben ejecutarse todos los cálculos que se encuentren en el libro.

Al principio la lectura ha de ser corta, y luego puede aumentarse gradualmente segun el hábito y la voluntad del discípulo.

Despues de leer se da cuenta de lo leido, de viva voz ó por escrito. Será poco lo que el discípulo diga en un principio, pero esto no importa, porque no se trata entonces de averiguar lo que sabe, sino de habituarle á aplicar la atencion y á vencer la timidez, ó perder el miedo, como se dice vulgarmente.

Cuando el discípulo ha dado cuenta de la leccion, indica las relaciones entre lo que ha leido y lo que ya sabe; *refiere* lo que *aprende* á lo que *sabe*: medio tan ingenioso como útil de habituar al niño á hacer uso de sus conocimientos, y que á la vez sirve para no olvidar lo que se aprende.

Importa que la lectura sea rápida para que pueda repetirse, pasando de largo por lo que no se haya referido, y tomando como axioma lo que no se comprenda la primera vez. Este

procedimiento presenta grandes ventajas; entre otras, la de dar al discípulo ipea general de la ciencia en poco tiempo, de suerte que á la segunda ó tercera lectura puede entrever de antemano el objeto de las cosas, cuya necesidad no haya concebido la vez primera.

Hemos hablado de las referencias que deben seguir á la lectura y que pueden hacerse de viva voz ó por escrito. Este último medio contribuye á que el trabajo sea mas completo, y debe amplearse alguna vez; pero el ejercicio oral tiene tantas ventajas y tan importantes, que convendria repetirlo todos los dias. En efecto, por este ejercicio adquiere el niño buen golpe de vista para abrazar pronto el conjunto, y sutileza para apreciar las menores relaciones de los objetos.

Despues que el discípulo ha señalado todas las relaciones que advierte entre lo que ha leido, lo que sabe, y las lecciones; despues que se da cuenta del espíritu que domina en la marcha seguida por el matemático en las diversas ocasiones en que lo ha observado, es preciso hacer resultar la manera de generalizar el álgebra, y los medios empleados en la aritmética. Por ejemplo, el niño ve el *hecho*:

$(1+2)^2=1^2+2.2.1+2^2$; si generaliza tendrá por resultado $(x+a)^2=x^2+2a+xa^2$, que es la fórmula del cuadrado del binomio. Si observa este otro *hecho*: $(1+2)^3=1^3+3.2.1^2+3.2^3.1+2^3$, y si generalza tambien, obtendrá $(x+a)^3=ax^3+x^2+3a^3\mathrm{x}+x^3$ y si continua generalicando. llegará por fin á la fórmula de Newton:

$$(x+xa)^n=^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.\,2}.a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}a^3x^{n3}$$

Uno de los principios esenciales del método, consiste en fundar todo el trabajo en *hechos*, pues el espiríru humano, por su propia naturaleza, investiga lo que hay en ellos de general.

La *imitacion* que hemos recomendado como uno de los ejercicios del método, puede aplicarse á las demostraciones de los teoremas á la exposicion de las teorías y á la solucion de los problemas. Hé aqui un ejemplo de esta última especie:

Problema. «Diofanto, autor del libro de álgebra mas anti-«guo que ha llegado hasta nosotros, pasó en la juventud la «sexta parte de su vida, y la dozava parte en la adolescencia: «luego se casó, y en este estado pasó la sétima parte de su vi-«da y cinco años mas antes de tener un hijo, el cual murió «cuatro años antes que su padre, á la milad de la edad que alcaznzó éste. ¿Qué edad contaba Diofanto á su muerte?»

Suponemos que el niño sabe una leccion que se refiere á la solucion de problemas, que ha resuelto los del libro y que ha comprobado su trabajo. Con estos conocimientos se halla en estado de imitar, y procede á la

Solucion. Representando por x la edad de Diofanto cuando ocurrió su muerte, el tiempo de su juventud será $\frac{x}{6}$, el de la adolescencia $\frac{x}{12}$, el tiempo que estuvo casado antes de tener un hijo $\frac{x}{6}+5$, y como sobrevivió cuatro años á su hijo, y este murió teniendo la mitad de la edad á que llegó el padre, se tendrá la siguiente ecuacion:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}5=\frac{x}{2}$$

Reducidos los quebrados á un comun denominador, resulta:

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+\frac{756}{84}+\frac{42x}{84}$$

Suprimiendo el denominador comun.:

$$14x+7x+12x+756=42x$$

∴ Reduciendo y trasladando.

$$42x-33x=756$$
$$\text{ó } 9x756;$$

$$\text{De donde } x=\frac{756}{9}=84$$

De consiguiente, murió Diofanto á la edad de 84 años.

El discípulo comprueba cada razonamiento y cada trasformacion con los *hechos* de su libro ó con las lecciones aprendidas antes.

Reflexiones sobre las ecuaciones. La resolucion de los problemas á que no alcanzaba la aritmética, ha conducido á las ecuaciones. Con los datos y las incógnitas consideradas como conocidas, se forman dos cantidades iguales, y reuniendo estas cantidades se forma la ecuacion del problema, esto es, su expresion, como se dice en lenguaje algebráico.

Este método es preferible á los demás: 1°. porque indica las relaciones entre la incógnita y los datos y las operaciones para despejarla ó hacer que quede sola en uno de los miembros de la ecuacion, mientras expresa el otro su valor en cantidades conocidas; 2.° porque la igualdad de los dos miembros se presta á multitud de operaciones, que siendo las mismas en los dos miembros, ni se altera la ecuacion, ni el valor de la incógnita.

Por lo comun, los problemas se prestan á ecuaciones de que se deduce fácilmente el valor de la incógnita; pero á veces se halla esta elevada á potencias, lo cual dificulta la resolucion, y estas potencias han obligado á hacer la division en ecuaciones de primero, segundo, tercero y cuarto grado.

El objeto de la análisis es encontrar métodos generales para obtener las *raices* de las ecuaciones; pero han sido vanos todos los esfuerzos. Se ha recurrido á métodos particulares para la resolucion de las ecuaciones de cada grado, y son muy pocos los que se han encontrado. Sin embargo, no han sido infructuosas estas investigaciones, pues han hecho descubrir muchas propiedades notables que han contribuido á los progresos de la ciencia y á inventar métodos, sino para obtener exactamente las raices, por lo menos para calcularla con bastante aproximacion, de modo que generalmente se toma esta por realidad.

El primer objeto del álgebra fué resolver los problemas á que no alcanzaba la aritmética: esta resolucion conducia siempre á una ó muchas ecuaciones, por cuyo medio se buscaba el valor de las incógnitas. Este problema es actualmente el objeto del álgebra, y á cuya resolucion, á pesar de todos sus esfuerzos, no han llegado los analistas sino en parte.

Si examinamos este objeto, descubriremos fácilmente la marcha seguida para conseguirlo. En la ecuacion del problema entran las incógnitas ya combinadas entre sí, ya con otras cantidades, y era menester aislarlas. Esto se consigue por medio de trasformaciones, es decir, cambiando sucesivamente de formas que sin alterar los valores conduzcan á la ecuacion final que se busca, ya reduciendo las cantidades que pueden reducirse, ya descomponiéndolas en factores para volverlas á componer de una manera mas ventajosa; en fin, por otra multitud de medios que seria demasiado largo indicar y que ocurren fácilmente al que está medianamente habituado al cálculo. De suerte, que en último resultado todo se reduce á trasformaciones, como ha podido observar el discípulo, así en la demostracion de los teoremas, como al resolver las cuestiones que se le han presentado.

Noticias históricas. El orígen del álgebra es reciente comparado con el de la aritmética. Diofanto de Alejandría que vivia probablemente hácia mediados del siglo IV de nuestra era, es el autor del tratado mas antiguo del álgebra que hemos conocido. Este tratado se componia de trece libros, de los cuales solo se han conservado seis; y en los que no se encuentra una exposicion de los principios elementales de la ciencia, sino una coleccion de cuestiones difíciles sobre los cuadrados y los cubos y sobre muchas propiedades de los números. Los problemas de Diofanto suponen la resolucion de las ecuaciones determinadas de primero y segundo grado y conocimientos extensos á cerca del análisis indeterminado. El problema que revela los años de vida de este autor, y que dejamos resuelto, indica la naturaleza de los de que se ocupaba, y es el epitafio del mismo, segun la autologia griega.

No por eso debemos creer se encuentre en Diofanto nada que se asemeje al mecanismo de las operaciones algebráicas, segun nosotros las efectuamos. En efecto, Diofanto representaba las incógnitas por la abreviacion final de la palabra número en griego sin emplear las letras del alfabeto ni los signos elementales, exceptuando el de sustraccion.

A Leonardo de Pisa (Fibonacci) deben los cristianos de Occidente el conocimiento del álgebra y el de la aritmética vulgar; si bien este autor habia adquirido estos conocimientos de los árabes que á su vez los recibieran de los griegos y especialmente de Diofanto. Es muy posible sin embargo que los árabes hayan tomado de la India algunos conocimientos algebráicos, porque en la India se habia cultivado el álgebra desde muy antiguo, como lo comprueban los dos tratados publicados en inglés hace cuarenta y siete años, y cuyas obras á haber sido conocidas en Europa un siglo antes, hubieran podido apresurar el progreso del análisis algebráico, aun durante la vida de Euler. En lo que no cabe duda es que el nombre mismo de la ciencia se debe á los árabes, que la llamaban *él djaber él mogabelah*, es decir, ciencia de las *restauraciones ó restablecimientos* de las proporciones y de las soluciones; nombre evidentemente tomado en virtud de la regla por la cual se operaba el paso ó restablecimiento de una cantidad negativa en positiva, transportándola ó restableciéndola en el otro miembro de la ecuacion. En cirujía y en la edad media, la palabra álgebra, significaba arte de restaurar, y en algunas lenguas de Europa, *algebristas*, que quiere decir cirujano.

Despues de Leonardo de Pisa, la ciencia algebraica hizo grandes progresos debidos á lot italianos Lucas de Burgo, Gerónimo Cardan, Scipion Ferrari y Tartaglia.

El algebrista aleman Cristobal Rudolph empleó, el primero, en su obra impresa en 1522, los signos

El aleman Stifel en su *aritmética integra* publicada en Nuaremberg en 1544, Peletier en 1558 y Buteon hácia la misma época, representaron las incógnitas por las letras A, B, C, y sus potencias por medio de signos ó esponentes, pero estos no son cifras sino signos análogos. La notacion actual de los exponentes es mucho mas antiguá, puesto que se encuentra en una obra dada á luz en 1520, reimpresa en 1538, titulada: *L'Arisméthique nocuvellement composée par maistre Estienne de la Roche diet Villefranche, natif di Lion.* El autor representa en ella las potencias 2.ª 3.ª 4.ª etc. de un número, por ejemplo 12, de este modo: 12^2, 12^3 12^4 etc.; y aplica los mismos exponentes para la espresion de las raices, sirviéndose del signo R, en lugar del signo √; por manera que las escribe así: $R^2 12$, $R^3 12$; $R^4 12$ etc. Esta aritmética comprende la *regla de la cosa*, es decir, el álgebra, y es el tratado de álgebra mas antiguo impreso en Erancia. El autor cita otra obra anterior á 1520 de Chuquet.

El geómetra inglés Racord, ha inventado en 1552 el signo =.

Adrianus Romanus (Van Rœmen) en 1597 ha hecho uso de las letras no solo como signos abreviados de cantidades como otros lo habian hecho antes que él, sino con el filosófico objeto de crear una ciencia matemática universal que abrazase, bajo lo fórmula de signos abstractos y generales, las cantidades de toda especie. Pero puede conceptuarse á Viste como el creador del álgebra moderna, puesto que fué el primero que inventó representar por símbolos los cálculos efectuados, no con números sino con letras, creando las espresiones y fórmulas algebráicas, y el arte de las trasformaciones que ahorra al espíritu humano tan largos y penosos razonamientos. Por esta razon dió á su álgebra el nombre de *especiosa*, puesto que todo en ella está representado por símbolos.

Ougthred, que nació en 1573, es el primero que hizo uso del signo de la multiplicacion ×; y Harriot en el siglo diez y siete, el que empleó los signos de desigualdad > y <.

En este mismo siglo y en el siguiente diez y ocho, la ciencia algebráica es deudora de grandes adelantos á Descartes, Fermat, Wallius, Galileo, Neper, Keller, Huygens, Newton, Leibuitz, los Bernonilli, Moivre, Sticling, Cotes, Lambert, Warinfi, Maclaurin, Euler, Alembert, Coudorcet, Lagrange, Vandermoude, Legendre, Laplace y otros.

El siglo actual ha contribuido tambien singularmente á aumentar el depósito de los conocimientos analíticos.

GEOMETRIA.

GEOMETRIA PLANA.

1.ª SECCION.—DE LAS LINEAS.

§. I. *Nociones preliminares.*

1. La *geometría* es una ciencia, que tiene por objeto la medida de la extension.

Si atendemos á su etimologia, esta palabra significa literalmente *medicion de la tierra*, habiendo merecido este nombre por la aplicacion que desde muy temprano se hizo de esta ciencia á la medicion de los terrenos.

2. Llamamos *extension* á todo lo que se compone de las tres dimensiones que comunmente se conocen con los nombres de *longitud*, *latitud* y *profundidad*.

3. Llámase *cuerpo* considerado geométricamente, todo aquello que ocupa un lugar en el espacio. El cuerpo reune siempre las tres dimensiones. En efecto, por pequeño, tenue y sútil que sea un cuerpo, siempre tendrá algo de largo, de ancho y de profundo ó grueso.

4. Pero nuestro entendimiento puede prescindir de una de estas dimensiones, de la profundidad p. ej., en cuyo caso queda el cuerpo solamente con su longitud y latitud, ó lo que es lo mismo, con la parte exterior que lo limita y encierra en un lugar determinado. A esto llamamos *superficie*. De suerte que *superficie* es el límite de un cuerpo, ó lo que resultaria en el cuerpo, desentendiéndonos de una de sus dimensiones. Si

nosotros nos figuramos una barra de hierro, en la cual vaya su grueso disminuyendo mas y mas hasta que llegue á cero nos formaremos idea de la superficie.

5. Si en la superficie concebimos que una de sus dimensiones, p. ej. la latitud, va decreciendo incesantemente, hasta que se haya reducido á cero ó lo que es lo mismo, hasta que hayamos llegado á los bordes que limitan la superficie, conoceremos de algun modo lo que se llama *línea*. Entendemos pues por *línea* el límite de la superficie, ó lo que quedaria de esta, prescindiendo de su latitud.

6. Figurémonos tambien que en la línea desaparece la longitud, ó que solamente fijamos nuestra atencion en los extremos que limitan la línea, y habremos concebido lo que se llama *punto geométrico*. Así pues, *punto geométrico* es el límite de la línea, ó lo que nos quedaria de la línea, si no tuviésemos en cuenta su longitud. No debemos confundir el punto geométrico, con lo que ordinariamente se llama punto. En las artes se da varias veces el nombre de punto á las posesiones de superficie muy pequeñas. Tales son los puntos de la escritura, los de las líneas puntuadas en el dibujo geométrico, etc. Tal es tambien el punto de costura de los sastres etc. Estos puntos por pequeños que se hagan, siempre tienen las tres dimensiones enumeradas.

La misma consideracion podemos hacer respecto de las líneas. Llamamos ordinariamente líneas á las rayas que trazamos con el yeso, lapicero etc., tambien llamamos líneas á los renglones de la escritura; sin embargo, tanto estas como aquellas tienen las tres dimensiones.

7. Bajo dos puntos de vista podemos considerar el espacio, la superficie y la línea: 1.° segun sus diferentes formas, llamadas comunmente figuras; 2.ª segun la relacion de su magnitud, es decir, segun su extension.

La extension recibe el nombre particular de *volúmen, area* ó *longitud*, segun que esta extension es la magnitud de un espacio, de una seperficie ó de una línea.

8. Para distinguir las diferencias de una figura geométrica, hacemos uso de las letras del alfabeto.

9. Llámanse *equivalentes*, aquellas figuras que tienen

la misma magnitud, sin tener la misma forma; *semejantes*, las que tienen la misma forma, pero diferente magnitud; é *iguales*, las que tienen á la véz la misma magnitud y figura.

10. El punto, como que carece de figura y de extension, no puede ser medido ni comparado, asi como medimos y comparamos los volúmenes, las superficies y las líneas. Para señalar el punto haremos uso de una sola letra (fig. 1).

Cuando entre varios puntos existe una analogía cualquiera, generalmente son designados por unas mismas letras que podemos distinguir entre sí ó por el carácter diferente de escritura ó por medio de un acento colocado sobre la letra á su derecha en la forma siguiente: A', A'', A'''...; y se leen de este modo: A *prima*, A *segunda*, A *tercera*, etc.

11. Las proposiciones principales y cuestiones que se consideran en la geometría, son las siguientes: el *axioma*, el *teorema*, la *recíproca*, el *corolario* y el *problema*.

12. Entiéndese por axioma una proposicion tan clara y evidente, que basta su enunciacion para reconocer inmediatamente su verdad.

13. De este género son las siguientes proposiciones:

1.ª Dos cantidades respectivamente iguales á una tercera son iguales entre sí.

2.ª El todo es mayor que una de sus partes.

3.ª El todo es igual á la suma de todas sus partes.

13. El *teorema* es una proposicion, que no siendo evidente por sí misma, recibe su claridad y evidencia por medio de un *razonamiento* llamado *demostracion*.

Dos partes se distinguen en la enunciacion de un teorema: La *hipótesis* ó suposicion que se hace; y la *conclusion*, consecuencia de la hipótesis.

14. Entendemos por recíproca de una proposicion, otra proposicion formada en sentido inverso de la primera.

El axioma, *el todo es mayor que cada una de sus partes*, *tiene por recíproca este* otro axioma *cada parte es menor que el todo.*

15. El *corolario* es una consecuencia inmediata de una proposicion procedente.

16. El *problema* tiene por objeto determinar una canti-

dad desconocida por medio de otras conocidas que tienen con aquella una relacion expresada en el enunciado de la cuestion.

Resolver un problema es determinar la cantidad desconocida: y el resultado obtenido se llama *resolucion* del problema.

17. Los métodos principales de resolucion, son la *superposicion de las figuras* y la *reduccion ab absurdum*.

Consiste el primer método en manifestar que las figuras *coinciden* entre sí; es decir, que una de ellas se puede aplicar exactamente sobre la otra quedando de este modo confundidas.

La *reduccion ad absurdum*, se verifica cuando suponemos que la proposicion no es verdadera; y despues por medio de ciertas deducciones sacadas de los principios ya reconocidos, resulta una contradiccion, ó con uno de estos principios ó con la suposicion misma que nosotros hemos hecho.

18. Los principales signos y abreviaciones de que haremos uso en la geometría, son:

= que significa *igual*
> *mayor*
< *menor*
+ *mas ó aumentado en*
— *menos, ó restado de*
× *multiplicado por*
÷ *partido por*
fig. *figura*
L. Q. Q. D. *lo que queria demostrar.*

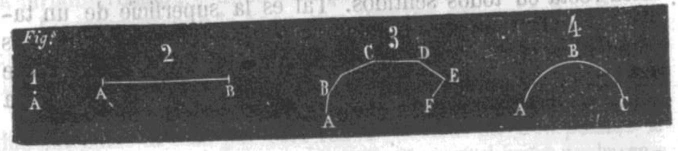
§. II. *De las diferentes especies de líneas.—Aplicaciones de la línea recta.—De la superficie plana ó del plano.*

1. Distinguimos tres especies de líneas: *recta*, *poligonal* y *curva*.

2. Entiéndese por línea recta, el camino mas corto de un punto á otro.

Infiérese de esta definicion que:
por dos puntos dados solamente se puede tirar una recta, y que dos puntos determinan completamente su posicion.

Por esta razon una recta se señala generalmente con dos letras A. B. (fig. 2) colocadas en sus extremidades.



Asimismo resulta de lo dicho que *dos rectas solamente pueden tener un punto comun*.

Llámase punto de *concurso*, de *encuentro* ó de *interseccion*, el punto en que dos líneas se cortan.

3. Llámase línea poligonal la línea compuesta de otras rectas que tienen dos á dos una extremidad comun, por ejemplo, la línea A B C D E F (fig. 3).

4. Llámase *curva* la línea que ni es recta, ni se compone de rectas, por ejemplo, la línea A B C (fig. 4).

5. Son infinitas las aplicaciones de la línea recta. Para trazarla nos valemos de la regla, instrumento muy conocido para que nos detengamos en su descripcion, pero si la regla está mal hecha tambien lo estará la línea que con ella se quiera trazar. Será pues muy conveniente el saber comprobar una regla; y por lo mismo presentaremos el siguiente medio tan exacto como sencillo.

Trácese la línea á lo largo de una arista; vuélvase la regla invirtiendo sus extremos y colóquese sobre la línea trazada la arista primitiva, por donde ha corrido el lapicero. Si esta línea queda cubierta en toda su longitud, es un indicio cierto de su rectitud y de que la regla es exacta.

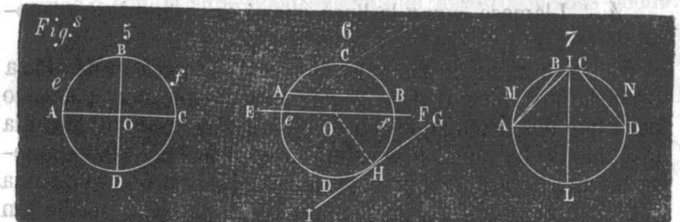
Hay ocasiones en que las rectas exigen tal longitud que su trazado no puede verificarse por medio de la regla. Los jardineros, y los albañiles hacen uso de una cuerda atada á dos estacas.

Los carpinteros y los ebanistas usan de un cordel que frotado con almazarron ó con negro de humo disuelto en aceite, aplican sobre dos puntos de la recta que quieren trazar, y estirándole fuertemente y levantándole por su mitad, le dejan caer sobre el cuerpo donde queda marcada la recta pedida.

6. Entendemos por *superficie plana ó por plano* aquella superficie sobre la cual puede aplicarse exactamente una línea recta en todos sentidos. Tal es la superficie de un tablero pulimentado etc. Llámase *superficie curva* la que ni es plana ni se compone de superficies planas: tal es la superficie del cristal de un reloj, llamándose *convexidad* la curvatura exterior, y *concavidad* la interior.

§. III. *De la circunferencia y del círculo.—De las aplicaciones del círculo.—Teoremas relativos á la circunferencia y al círculo.*

1. La *circunferencia* es una línea curva trazada sobre un plano, cuyos puntos distan todos igualmente de otro que se llama centro. Tal es la curva A B C D (fig. 5.)



2. El *círculo* es la porcion de plano limitado por la circunferencia. Así, pues, la circunferencia es una línea; y el círculo una superficie: á pesar de esta diferencia se suelen confundir ordinariamente, llamando círculo á la circunferencia.

3. Llámase *rádio* la línea tirada del centro á la circunferencia. Tales son las rectas OA, OB, OC, OD. (fig. 5.)

Entendemos por *diámetro* la recta que pasando por el centro del círculo, termina por sus dos extremos en la circunferencia: p. ej. AC, BD (fig. 5.)

4. Por *arco* se entiende una parte cualquiera de la circunferencia, como ACB, ó ADB (fig. 6.)

Para la anotacion de un arco, necesitamos poner tres le-

tras. En efecto si solamente lo designáramos con las letras AB, no se podria saber si hablábamos de la porcion ADB de la circunferencia, ó de la mas pequeña ACB.

Llámase *cuerda* la línea que une las extremidades de un arco, como AB. *Segmento* es la parte de círculo comprendido entre el arco y la cuerda.

Entiéndese por *secante* una cuerda prolongada por sus dos extremos la cual por esta razon cortará en dos puntos á la circunferencia, como la línea EF. Si concebimos en la secante confundidos en uno solo los dos puntos en que corta á la circunferencia, nos habremos formado idea de la *tangente*: por esta razon se dice que la *tangente* es una recta que toca en un solo punto á la circunferencia; tal es la GHI (fig. 6). Este punto comun H, se llama punto de tangencia ó de contacto.

5. La circunferencia se suele dividir comunmente en 360 partes iguales que se llaman *grados*; cada uno de estos en 60 partes tambien iguales, llamadas *minutos*; cada minuto en 60 *segundos*. Para la indicacion de los grados nos valemos de este signo °, colocado á la derecha del número un poco mas alto; para los minutos de un acento ′; para los segundos de dos ″. Queremos p. ej., expresar un arco de 35 grados, 8 minutos, 25 segundos; lo haremos en la forma siguiente: $35°\ 8'\ 25''$.

La circunferencia, en el sistema decimal, se divide en 400 grados; cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

Cuando un autor hace uso de esta division, ordinariamente lo suele advertir en el prólogo; y á falta de esta advertencia la anotacion diferente de esta division nos servirá para distinguirla de la otra; pues en la centecimal los grados se señalan con la inicial *g*. A pesar de las ventajas que por su armonía con el sistema decimal ofrece esta division, ha conservado la supremacia la division antigua de la circunferencia en 360 grados.

Es muy sencillo pasar de una á otra division. Si queremos p. ej. convertir los grados centecimales en los de la division antigua, multiplicaremos los grados que se nos den, por 0,9: y si al contrario, por $\frac{10}{9}$. El fundamento de esta práctica es el siguiente. Se quiere p. ej. saber á cuantos grados de la division antigua corresponden 25 centecimales; formaríamos esta proporcion:

100:90::25:x; y simplificando la primera razon, resulta: 10:9::25:x; de donde x, número de grados que corresponden á la otra division, $=\frac{25\times9}{10}=25\times0,9$.

Para resolver el problema inverso invertiríamos los términos de la razon primera.

6. Llámase *cuadrante* la cuarta parte de la circunferencia, AEB, BfC (fig. 5). Asi un cuadrante vale 90 ó 100 grados, segun la division á que estos correspondan.

7. El círculo es en las artes de un uso casi tan comun como la línea recta. Las ruedas de las máquinas, las muelas de los molinos, los cuadrantes de los péndulos, etc. son verdaderos círculos. Las cazuelas, los barreños, los cántaros, los toneles etc. tienen sus aberturas circulares. Es pues de la mayor importancia saber cómo se describe el círculo.

El instrumento de que ordinariamente se hace uso para trazar el círculo es el *compas*, instrumento que todos conocen. Se compone de dos brazos terminados en punta por una de sus extremidades, y unidos en la otra por medio de una articulacion, la cual permite se separen mas ó menos, segun el radio que al círculo queremos.

Para describir un círculo sobre el papel, se apoya ligeramente una de las puntas del compas abierto, haciendo que la otra gire al rededor de la primera, de modo que vaya dejando en pos de sí cierta señal: este rastro que la punta ha dejado en su revolucion, será el círculo que se pedia.

Si queremos trazarle sobre el terreno, haremos uso de una vara larga ahugereada por una de sus extremidades. Introduciendo despues en el ahugero una estaquita, haremos

que esta gire al rededor de la otra extremidad fija siempre en un mismo punto. La línea que de este modo hayamos formado, será la circunferencia deseada.

Si el círculo es tan grande que la pértiga no alcance, podemos sustituirla con una cuerda, teniendo cuidado de que conserve siempre la misma tirantez durante la vuelta que para nuestro objeto ha de dar uno de sus extremos.

8 Teoremas. *Los radios de un mismo círculo son todos iguales.*

La verdad de este teorema se infiere inmediatamente de la definicion del círculo y del radio. En efecto, los radios miden las distancias del centro á cada uno de los puntos de la circunferencia; es así que estas distancias son todas iguales, segun resulta de la definicion de la circunferencia: luego los radios de un mismo círculo todos son iguales.

Por este principio, las ruedas de un carruaje deben ser círculos descritos con radios iguales; sino fuera así, el carruaje se ladearia por uno ú otro lado.

9. *Dos circunferencias trazadas con un mismo radio son iguales,*

Para hacer ver la verdad de este teorema, tomaremos uno de los círculos y lo colocaremos sobre el segundo, de modo que sus centros coincidan; en este caso las dos circunferencias, como que han sido trazadas con un mismo radio, deben confundirse en toda su extension.

10. *Los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

El diámetro no es otra cosa que la reunion de dos radios opuestos; estos son iguales, segun acabamos de demostrar: luego tambien lo serán aquellos.

11. *El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales* (fig. 5.)

Para demostrar este teorema, doblaremos el círculo de manera que la parte A B C caiga sobre la A D C. Es induvitable que el primer segmento A B C se confundirá exactamente con el otro A D C; porque si uno de ellos saliese fuera del otro, no distarian igualmente del centro todos los puntos de la circunferencia, resultado incompatible con la definicion del círculo.

Así pues, *el diámetro divide al círculo en dos semicírculos, y á la circunferencia en dos semicircunferencias.*

12. *En un mismo círculo, ó en círculos trazados con el mismo radio, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas.*

La superposicion de los arcos nos manifiesta claramente esta verdad. Siendo los arcos iguales, los podemos sobreponer de modo que sus extremos se confundan, en cuyo caso se confundirán tambien los extremos de las cuerdas que terminan en los de los arcos: luego las cuerdas se habrán confundido en toda su extension: luego serán iguales.

Recíprocamente, si las cuerdas son iguales, lo serán los arcos subtendidos.

Supongamos la cuerda AB=á la CD (fig. 7.), el arco A M B será tambien igual al C N D.

Sobreponiendo las cuerdas, por ser iguales, se confundirán exactamente, y por esta razon se habrán confundido los extremos de los arcos: luego estos arcos quedarán ajustados en toda su extension.

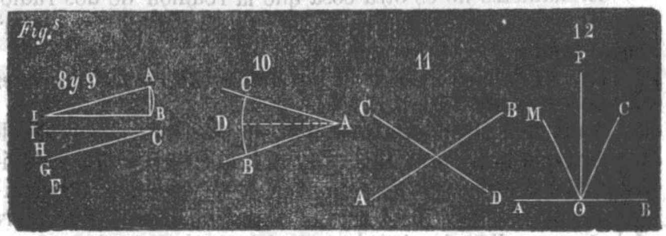
13. De lo dicho resulta que:

En un mismo círculo á mayor arco, corresponde mayor cuerda y recíprocamente.

Suponemos que los arcos no son mayores que la semicircunferencia. Así la cuerda AI del arco AMI> que la AB del arco AMB; y recíprocamente el arco AMI> AMB.

El teorema precedente nos suministra un medio muy sencillo de *construir un arco igual á otro dado.*

Se nos da el arco AB (fig. 8 y 9): en el punto C con un



radio igual á DA, se trazará un arco indefinido EF; tomaremos la distancia AB, cuerda del arco AB, y la colocaremos

desde F hasta G: el punto G determinará el arco FHG que debe ser igual al arco AB, supuesto que ambos tienen una misma cuerda.

§. IV. *Del ángulo y de sus diferentes especies.—De la perpendicular y de la oblicua.—Teoremas relativos á las perpendiculares, á las oblicuas y á los ángulos.*

1. Llámase *ángulo* la porcion de plano comprendido entre dos rectas que se encuentran: tal es la parte de plano que comprenden las dos rectas AB, AC, (fig. 10).

Vértice del ángulo es el punto A, en el que se encuentran ó se cortan las dos rectas, y *lados* del ángulo son las líneas AB, AC, que forman el ángulo.

2. La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de su mayor ó menor separacion. Efectivamente, los lados del ángulo, así como otra cualquier línea, los debemos considerar indefinidos: esta prolongacion indefinida de los lados nada altera su abertura que es la que constituye el ángulo.

3. La anotacion del ángulo se hace ordinariamente con tres letras, debiendo interponer la del vértice, siempre que lo queramos nombrar. Así decimos indiferentemente CAB ó BAC. Algunas veces basta para la designacion de un ángulo la letra de su vértice, teniendo lugar esta abreviacion cuando el vértice no sea comun á muchos ángulos.

4. Llámanse *ángulos opuestos verticalmente* dos ángulos, cada uno de los cuales está comprendido entre las prolongaciones de los lados del otro; como AOC y BOD, AOD y BOC (fig. 11.)

Llamamos *ángulos adyacentes* á dos ángulos consecutivos que tienen un lado comun, siendo los otros dos prolongacion el uno del otro; en este caso se encuentran los ángulos AOC y COB, COB y BOD, BOD y DOA, DOA y AOC, tomados dos á dos.

Llámase *bisectriz* de un ángulo la recta que lo divide en dos ángulos iguales, como AD (fig. 10.)

5. Entendemos por *perpendicular* aquella recta que en-

cuentra á otra línea, formando con ella dos ángulos adyacentes iguales, como la línea PO (fig. 12.) Recíprocamente la línea AB es perpendicular á la PO.

No debemos confundir la perpendicular con la vertical. La *vertical* está muy bien representada por la direccion de la plomada libremente suspendida; de manera que si nosotros concebimos una recta tirada de un punto cualquiera al centro de la tierra, nos formaremos idea de la vertical. Si nos figuramos una recta perpendicular á la vertical, conoceremos la línea *horizontal* llamada tambien línea de nivel.

Dícese *oblicua* aquella línea que cae sobre otra formando con ella dos ángulos adyacentes desiguales: tales son las líneas GO, MO.

Llámase *pié de la perpendicular* ó *de la oblicua* el punto en que estas líneas se encuentran con otra, p. ej. el punto O.

Cuando se construye la perpendicular sobre un punto O, tomado sobre una recta AB, se dice que *levantamos* una perpendicular sobre la recta; y cuando se traza desde un punto P, tomada fuera de la recta AB, la perpendicular se dice *bajada* á la recta.

6. Distinguimos tres clases de ángulos, *ángulo recto, agudo y obtuso.* Dícese *ángulo recto*, todo ángulo formado por dos líneas perpendiculares entre sí: como los ángulos AOP, POB (fig. 12.)

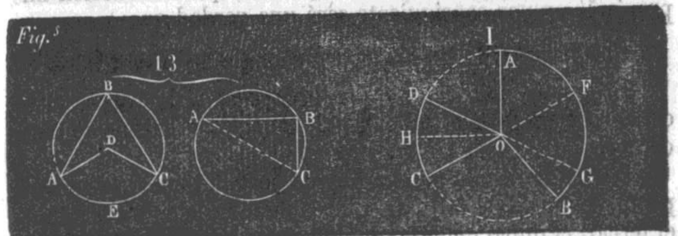
Entiéndese por *ángulo agudo* todo ángulo menor que el recto, como GOB; y por *obtuso* el que es mayor que el recto, como MOB. A primera vista se conoce que los ángulos *agudo* y *obtuso* son formados por líneas oblicuas entre sí.

El ángulo cuyo vértice está en el centro, y cuyos lados son rádios del círculo se llama ángulo del centro, como ADC, (fig. 13): el ángulo que formado por dos cuerdas tiene su vértice en la circunferencia, se llama ángulo inscrito como ABC.

7. Supongamos que al lado AB del ángulo ABC, (fig. 10 y 13), se coloca sobre el lado BC, y que en seguida se separa de esta recta, girando al rededor del punto B, hasta que forme el ángulo ABC. En este movimiento semejante en un todo al de la pértiga que en otra ocasion presentamos para

la construccion del círculo, es induvitable que la extremidad A de AB no ha podido pasar de C al punto A, sin describir al mismo tiempo un arco de círculo CA cuyo centro se halla en B. Asimismo es incuestionable que al paso que aumenta ó disminuye el ángulo ABC, es decir, segun que AB se aproxima ó aparta de BC, aumenta ó disminuye el arco en la misma proporcion.

Para presentar esta verdad con todo el rigor y claridad de que es susceptible, nos valdremos de la siguiente construccion:



Supongamos (fig. I) dos ángulos AOB, COD, cuyos arcos correspondientes hayan sido trazados con un mismo rádio. Si sobreponemos el ángulo COD al AOB, de modo que el lado OD del primero coincida con el OA del segundo, el lado OC estará representado por el OF; de este modo el arco correspondiente CD se confundirá con el AF: el ángulo pues COD ha sido una vez sobrepuesto al ángulo AOB, así como su arco correspondiente CD al AFB del segundo ángulo. Supongamos que el ángulo COD, despues de haber sido sobrepuesto dos veces al ángulo AOB, deje un residio GOB, menor que COD; el arco CD tambien quedará sobrepuesto otras dos veces al arco AB, dejando un residuo GB menor que CD; de donde resultará:

$$AOB=2\ CODD+GOB, \qquad AB=2\ CD+GB.$$

Colocaremos ahora el ángulo GOB sobre el COD, y supongamos que cabe exactamente dos veces, el arco GB, cabrá tambien dos veces sobre el CD; de donde tendremos:

$$COD=2\ GOB, \qquad CD=2\ GB.$$

Las dos ecuaciones anteriores se habrán convertido en estas:

$$AOB=5\ GOB, \qquad AB=5\ GB.$$

Asi pues, el ángulo GOB está contenido cinco veces en el AOB, y dos veces en el COD: del mismo modo el arco GB cabe cinco veces en el AB, y dos veces en el CD. La relacion, pues, entre los dos ángulos AOB, COD, y entre los arcos correspondientes AB, CD está expresada por la fraccion impropia $^5/_2$ y por consiguiente será una verdad que:

ángulo AOB: *ángulo* COD: : *arco* AB: *arco* CD.

Luego los ángulos son proporcionales á los arcos descritos con un mismo rádio. L. Q. Q. D. Esto mismo se puede decir de los sectores circulares.

De donde resulta que un ángulo será la mitad, la tercera parte, el duplo de otro, si su arco de indicacion es la mitad, el tercio, el duplo del arco de indicacion del otro, construidos ambos arcos con un mismo rádio.

Esta dependencia constante y recíproca que entre los arcos y los ángulos acabamos de manifestar, nos autoriza para tomar la *indicacion* de un ángulo en su arco correspondiente; pero es preciso que no olvidemos que para que esta sustitucion sea legítima, el ángulo ha de tener su vértice en el centro del círculo.

Si queremos, pues medir un ángulo, compararemos su arco con el arco del ángulo que tenemos por unidad.

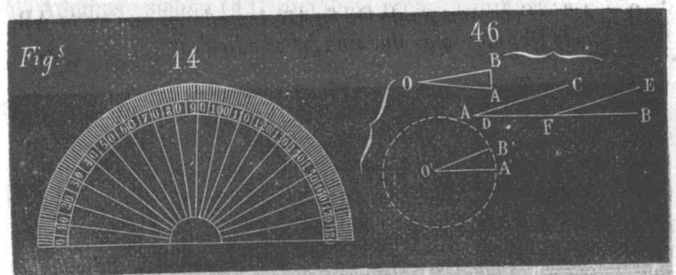
8. Si reflexionamos que los ángulos presentan una superficie indefinida, desde luego conocerémos que no se pueden medir con la unidad superficial de que nos servimos para medir otras superficies limitadas; la medida pues del ángulo debe ser otro ángulo. El que se ha adoptado como unidad, tiene por arco de indicacion la 360.ª parte de una circunferencia cualquiera, construida sobre el vértice como centro. Este ángulo se llama ordinariamente *ángulo de un grado.*

Asi, cuando se dice un ángulo de 10 grados, de 90 grados, etc., se dice, no solamente, que el arco de indicacion contiene 10 veces, 90 veces, etc. la 360.ª parte de la circunferencia; se expresa ademas, que el ángulo es 10 veces, 90 veces, etc. mayor que el ángulo de un grado. La indicacion pues, de un ángulo en grados, nos hace conocer á un mismo tiempo el nombre y la magnitud de este ángulo.

Segun esto, el ángulo recto será igual á 90 ángulos de un grado; y de consiguiente tendrá por medida la cuarta parte de la circunferencia.

Si queremos referir los ángulos al ángulo recto como unidad, dividiremos la medida de aquellos por la del último; asi un ángulo de 30°, diremos que vale $\frac{30}{90}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ de ángulo recto.

En la práctica para medir un arco y por consecuencia el ángulo, hacemos uso de un instrumento llamado *trasportador* (fig. 14). Consiste en un semicírculo que tiene un *limbo* ó su borde dividido en 180 grados. Para verificar esta medicion se coloca el centro del semicírculo en el vértice del ángulo; el arco comprendido entre sus lados nos indicará la magnitud del angulo.



Tambien podemos aplicar este instrumento á la construccion de un angulo, cuya medida se nos dé. Se nos pide p. ej. construir un ángulo de 25.° Trazarémos una recta; en uno de sus extremos fijaremos el centro del semicírculo, sobreponiendo el diámetro á la recta; en esta disposicion marcarémos en el papel el punto correspondiente al número 25.° y uniendo este punto con el extremo de la recta donde estaba el centro del semicírculo habrémos obtenido el ángulo pedido.

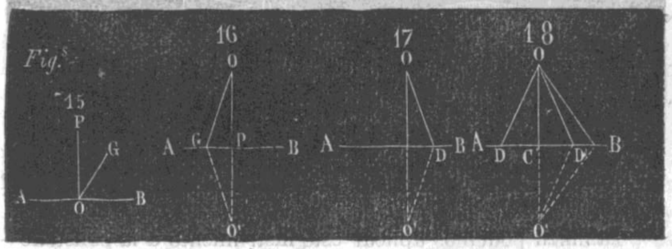
Podemos sin necesidad de este instrumento construir un ángulo igual á otro dado.

Sea el ángulo AOB (fig. 46), al cual se nos pide formar otro igual. Tirarémos ante todo una recta A'O'; sobre uno de los extremos de esta recta hemos de construir el ángulo pedido de la manera siguiente. Sobre el punto O como centro y con un rádio arbitrario OA trazarémos el arco AB; sobre el punto O' como centro y con el mismo rádio describirémos un arco indefinido A'B'; tomarémos la distancia AB, y con esta distancia como rádio, formarémos desde el punto A' como centro un arco de círculo que corte al precedente en B', y finalmente tirarémos la recta O'B'.

El ángulo A'O'B' será igual al propuesto, porque sus arcos correspondientes trazados con un mismo rádio, tienen iguales sus cuerdas: de consiguiente tambien lo serán sus arcos.

Teoremas relativos á las perpendiculares y á las oblicuas.

9. 1.° *Sobre un punto O (fig. 15) tomado en una recta AB, no se puede levantar mas que una perpendicular:*



En efecto si sobre la AB se pudiesen levantar las dos perpendiculares OP, OG, resultaria que cada una de estas dos

rectas OP, OG, formaría con la línea AB, dos ángulos adyacentes iguales, y así tendríamos:

$$AOP = AOG, \qquad BOG = BOP.$$

absurdo incompatible con un axioma.

2.° *De un punto O (fig. 16) tomado fuera de una recta AB, solamente se puede bajar una perpendicular.*

De la suposicion contraria nos resulta tambien un absurdo, como vamos á ver. Si OG fuese perpendicular á la AB, GO' formaria con GO una misma línea recta, por ser estas dos rectas perpendiculares á la AB. Pero al mismo tiempo las PO y PO' componen tambien una misma recta. Ya se ve pues, desde luego un *contraprincipio*, el punto O al O' se podrían dirigir dos rectas diferentes, OGO', OPO'.

10 *La perpendicular OC (fig. 17) bajada desde el punto O á la recta AB, es la distancia mas corta de dicho punto á la recta.*

Este teorema se reduce á demostrar que la perpendicular OC es mas corta que cualquiera oblicua OD. Para presentar claramente esta verdad, harémos girar la parte de figura OCD alrededor de la AB como eje, de modo que venga á caer sobre O'CD; en cuyo caso tendremos:

$$O'C = OC, \qquad O'D = OD.$$

Ademas, siendo OCO' una línea recta, resultará:

$OC + CO' < OD + DO'$, y por la igualdad de O'C y OC, de O'D = OD, tendremos:

$$2\ OC < 2\ OD.$$

Tomando la mitad en los dos miembros de esta desigualdad, concluiremos que:

$$OC < OD:\ \text{L. Q. Q. D.}$$

11 1.° *Dos oblicuas OD, O'D equidistantes del pie de la perpendicular OC, son iguales (fig. 18).*

Segun la suposicion que hacemos en el teorema CD=CD'; si doblamos pues la figura á lo largo de la perpendicular OC' los puntos D y D' se confundirán y tambien las oblicuas OD, O'D: luego OD=OD.

2.° *De dos oblicuas OD, OE que no están á igual distancia de la perpendicular, es mayor la que mas se aparta de su pie.*

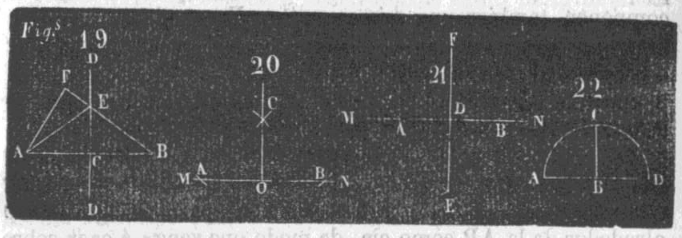
Para hacer palpable esta verdad, doblaremos la figura á lo largo de la recta AB: de este modo, habremos obtenido que:

$$O'D=OD, \quad O'E=OE;$$

pero $OD+O'E<OE+O'E$, ó lo que es lo mismo; $2\,OD<2\,OE$ y dividiendo por 2 la última desigualdad, se verá que:

$$OD<OE. \text{ L. Q. Q. D.}$$

12 1.°, *Cualquier punto* E *(fig. 19) de la perpendicular* CD, *levantada sobre el medio de la recta* AB, *dista igualmente de los extremos.*



En efecto, tirando las rectas AE, BE, tendremos que:

$$AE=BE, \text{ supuesto que } AC=BC.$$

2.° *Todo punto* F, *que esté fuera de la perpendicular anterior, no puede estar á igual distancia de los dos extremos.*

Para demostrar este teorema, haremos la siguiente construccion. Tiraremos las rectas AF, BF; y por el punto E en que BF corta á CD, dirijiremos la AE. Esta construccion nos dará:

$AF<AE+EF$, ó lo que es lo mismo: $AF<BE+EF$; y por fin; $AF<BF$.

13. 1.° *Levantar sobre el punto* O *(fig. 20) de la recta* MN, *una perpendicular á esta recta.*

Para resolver este problema, sobre la recta MN tomaremos $OA=OB$. Desde los puntos A y B como centros, y con un mismo radio arbitrario, pero siempre mayor que OA, describiremos dos arcos que se cortarán en un punto C; tirando

ahora la recta OC, esta será la perpendicular pedida, puesto que el punto C equidista de los puntos A y B.

2.° *Desde un punto* C *(fig. 21) tomado fuera de una recta, bajar una perpendicular á esta recta.*

Una construccion análoga á la anterior, nos conducirá á la resolucion de este problema.

Del punto C como centro y con un radio cualquiera, pero siempre mayor que la perpendicular CD, trazaremos un arco de círculo que cortará la recta M N en dos puntos A, B. Además, desde los puntos A y B como centros y con un mismo radio arbitrario mayor que la mitad de la AB, describiremos dos arcos que se cortarán en un punto tal como E; tirando la recta CE, esta será la perpendicular deseada; supuesto que los puntos C, D, E, etc. están á igual distancia de los puntos A y B.

Teoremas relativos á los ángulos.

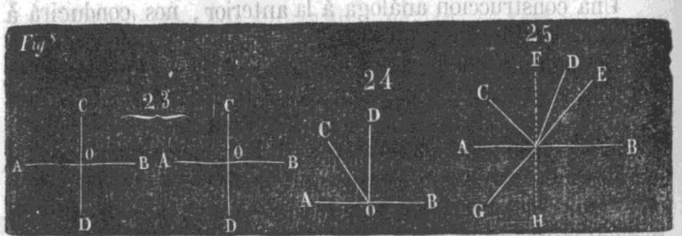
14. *Si prolongamos uno de los lados* AB *de un ángulo recto* ACD *(fig. 22.) el otro lado* BC *formará con la prolongacion* BD *otro ángulo recto* CBD.

En efecto, si sobre el punto B describimos una semicircunferencia que termine en el diámetro AD, el arco AC será la medida del ángulo ABC, y como este ángulo es recto, A C será la cuarta parte de la circunferencia ó la mitad de la semicircunferencia ACD. Asi pues, el arco CD será la otra mitad ó la cuarta parte de la circunferencia, y como el arco CD es la medida del ángulo CBD, este ángulo será recto.

De aquí se infiere que una recta no puede formar con otra un ángulo recto, sin formar otro segundo ángulo recto con su prolongacion.

15 *Los ángulos rectos son todos iguales.*

Para comprender la verdad de este teorema, debemos considerar, (fig. 23) que la recta AB divide el plano de las dos rectas AB, CD, en dos mitades que por la sobreposicion quedarán confundidas: ademas, los ángulos AOC BOC son iguales, segun resulta de las definiciones del ángulo recto y de la perpendicular. Consideremos al mismo tiempo, que la recta CD divide igualmente el plano en otras dos mitades sus ceptibles de una exacta sobreposicion; de aquí la igualdad de los ángulos AOD, BOC; y por consecuencia la igualdad de los cuatro ángulos rectos que tienen comun el vértice O.



Esta proposicion tiene lugar en todos los ángulos rectos posibles aunque no tengan el vértice comun.

16. *Toda línea recta* CO (fig. 24) *que cae sobre otra* AB *oblicuamente, forma con ella dos ángulos adyacentes* AOC, COB, *cuya suma vale dos rectos.*

La verdad de este teorema se presentará con toda claridad, si en el punto O, se levanta sobre AB, la perpendicular OD, que formará dos ángulos rectos, cuya suma es idéntica con la suma de los dos ángulos AOC, COB.

Llámanse ángulos *suplementarios*, aquellos ángulos que juntos valen dos rectos; así el ángulo AOC es el *suplemento* del COB, y recíprocamente, porque cualquiera de ellos es puntualmente lo que falta al otro para valer dos rectos ó 180 grados.

Se dicen ángulos *complementarios*, aquellos cuya suma es igual á un recto.

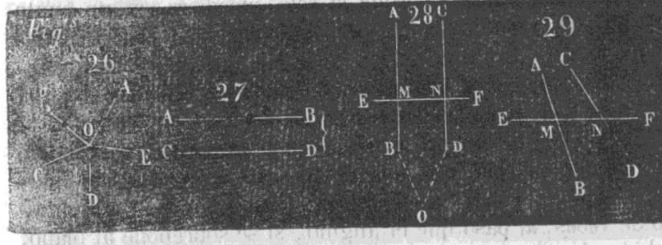
17. Corolario 1.° *La suma de todos los ángulos consecutivos* AOC, COD, DOE, EOB (fig. 25) *que se pueden formar en un punto y á un mismo lado de la recta* AB, *es siempre igual á dos ángulos rectos.*

Para demostrarlo, bastará levantar sobre AB la perpendicular OF.

Corolario 2.° *La suma de los 4 ángulos formados por dos rectas* AB, EG *que se cortan entre sí, es equivalente á 4 rectos.*

Si se quiere ver esta verdad, bájese la perpendicular F H (fig. 25).

Corolario 3.° *La suma de todos los ángulos consecutivos* AOB, BOC, COD, (fig. 26) *formados en un plano al rededor de un mismo punto* O, *es siempre igual á cuatro ángulos rectos.*



Este corolario es una consecuencia de los dos precedentes.

18. *Si dos rectas* AB, CD (fig. 11) *se cortan entre sí, los ángulos opuestos verticalmente* AOC y BOD, AOD y BOC *son iguales dos á dos.*

Efectivamente, los ángulos adyacentes AOC y BOC, BOC y BOD valen respectivamente dos ángulos rectos; pero dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí; luego:

$$AOC + BOC = BOC + BOD.$$

Ahora, si de los dos miembros de esta igualdad quitamos el ángulo comun BOC, nos quedará AOC=BOD.

Del mismo modo podriamos demostrar la igualdad de los ángulos BOC y AOD.

19. Son muy comunes los ángulos en las artes y en los usos de la vida, pues tienen lugar en la arquitectura, en la jardineria y en todas las artes industriales que se trabajan en la madera y en la piedra.

Los canteros trasportan sobre la piedra, el ángulo que forman los cimientos de dos paredes.

§. V. *De las paralelas y de las secantes.*

1. Llámanse *paralelas* las rectas que situadas en un

plano, jamás pueden encontrarse, aunque se prolonguen indefinidamente, como AB, CD (fig. 27.)

Para hacer ver la posibilidad de estas líneas, supongamos en un plano dos líneas distintas AB, CD, (fig. 28,) perpendiculares á una tercera E F en los puntos respectivos M y N. Es claro, que por mas que se prolonguen estas líneas, jamas podrán encontrarse; porque si esto sucediera en un punto tal como O, resultarian dos perpendiculares AB, CD, bajadas de un punto sobre una misma recta EF, lo cual es un absurdo. Así pues, estas dos líneas, por ser perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.

Entendemos por *zona* la porcion de plano comprendido entre dos paralelas. La *zona* es menor que un ángulo cualquiera, porque aquella cabe en un plano un número ilimitado de veces, al paso que el ángulo, si se sobrepone al plano, cabrá solamente un número limitado de veces.

2. Llámase *secante* toda recta que corta ó atraviesa de cualquier modo un sistema de otras rectas, paralelas ó no paralelas.

3. Cuando dos rectas cualesquiera AB, CD (fig. 29) son cortadas por una secante EF, resultarán formados al rededor de los dos puntos de interseccion M, N, ocho ángulos que considerados separadamente, ó combinados dos á dos, reciben las denominaciones siguientes:

Considerados separadamente. 1.° Los cuatro ángulos AMF, BMF, CNE, DNE, cuya abertura está dentro de las rectas AB, CD se llaman *ángulos internos*.

2.° Los otros cuatro AME, BME, CNF, DNF, colocados fuera de las rectas, se llaman *ángulos internos*.

Comparados dos á dos: 1.° Los ángulos internos AMF y DNE, CNE y BMF se llaman *alternos-internos*; alternos, por estar situados á diferente lado de la secante; internos, porque su abertura está dentro de las dos rectas.

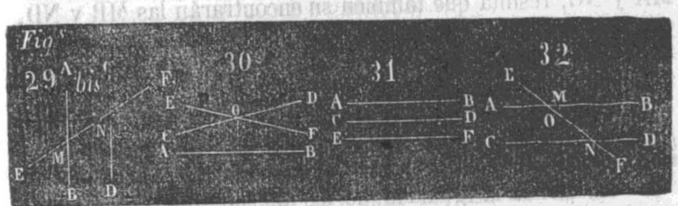
2.° Los ángulos externos AME y DNF, BME y CNF, se llaman *alternos-externos*; alternos, por estar formados á diferente lado de la secante; y externos, porque se hallan fuera de las dos rectas.

3. Los ángulos AME y CNE, AMF y CNF, BME y DNE,

BMF y DNF, se llaman *ángulos correspondientes*, por estar colocados dos á dos á un mismo lado de la secante.

TEOREMAS RELATIVOS Á LAS PARALELAS. DEMOSTRAR QUE:

4. *Por un punto dado, O, solamente se puede tirar una paralelaá la recta AB (fig. 30).*



En efecto, para trazar en el punto O, dos paralelas CD, EF á la recta AB, es necesario que el ángulo DOF pueda ser contenido dentro de la zona ABCD, ó el ángulo COE en la zona ABEF; esto es imposible, porque, como hemos dicho, cualquier ángulo es mayor que la zona de las paralelas; luego tambien es imposible la suposicion que hemos hecho, á saber, que por el punto O se puedan tirar dos paralelas á la recta AB.

5. *Dos rectas AB, CD respectivamente paralelas á una tercera EF, son paralelas entre sí (fig. 31.)*

Porque si estas rectas pudiesen encontrarse en algun punto, tendriamos en este punto trazadas dos paralelas AB, CD á una misma recta EF, lo cual es un absurdo.—De aqui se infiere que:

Dos rectas respectivamente paralelas, tienen comunes sus paralelas.

6. *Dos rectas AB, CD son paralelas, cuando cortadas por una secante EF, forman con esta los ángulos alternos-internos iguales (fig. 32.)*

Antes de entrar en la demostracion debemos observar que no pueden ser iguales entre sí dos ángulos alternos-internos, sin que los otros dos ángulos alternos-internos, BMN, MNC, suplementos respectivos de los primeros, sean tambien iguales entre sí.

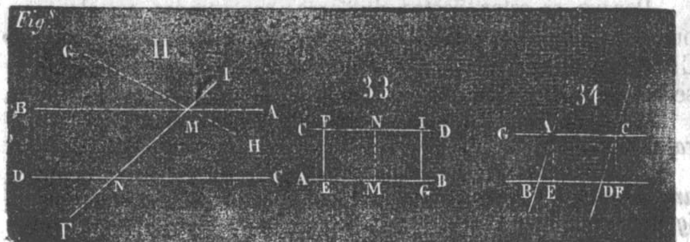
Supongamos ahora que llegaran á encontrarse las porciones indefinidas de recta MA, NC; en esta suposicion, hágase girar la porcion de plano AMNC al rededor del punto O, mitad de MN, de modo que OM venga á ocupar el lugar de ON; en cuyo caso MA tomará la posicion ND, y NC la MB.

Pero encontrándose todavía en esta nueva posicion las MA y NC, resulta que tambien su encontrarán las MB y ND, que en la sobreposicion se han confundido con las anteriores; siguiéndose de aqui que las rectas AB, CD, tendrian dos puntos comunes, lo cual es imposible.

7. *Dos paralelas AB, CD cortadas por una secante MN, forman con esta iguales respectivamente los ángulos alternos-internos, los alternos-externos y los correspondientes.*

Demostrada la igualdad de los alternos-internos, la inspeccion de la figura bastará para conocer la igualdad respectiva de los alternos-externos y de los correspondientes; por esta razon nos concretaremos á los primeros.

Supongamos (fig. II.) que en el caso propuesto no fuesen iguales los ángulos alternos-internos CNE, BMF, podriamos tirar por el punto M otra recta tal como GH que formase con la secante un ángulo igual al CNE; en cuyo caso esta nueva recta sería paralela á la CD, segun el teorema anterior, teniendo en consecuencia dirigidas por el punto M dos paralelas á la recta CD, lo cual es imposible.



Hemos dicho que mirando detenidamente la figura, cono-

ceríamos desde luego la igualdad de los alternos-externos y de los correspondientes.

En efecto, si queremos demostrar la igualdad de los ángulos alternos-externos, tales como FND, AME, procederíamos del modo siguiente: FND=ENC, porque son opuestos verticalmente; pero ENC=FMB, por ser alternos-internos; luego FND=FMB; pero FMB=AME, por opuestos verticalmente; luego:

FND=AME.

La igualdad de los ángulos correspondientes, tales como CNE, AME, se hace ostensible del modo siguiente: segun hemos visto, AME=FND por ser alternos-externos; pero FND =CNE por opuestos verticalmente; luego:

AME=CNE. L. Q. Q. D.

8. *Dos paralelas* AB, CD. (fig. 28) *tienen comunes sus perpendiculares.*

Supongamos dos paralelas AB, CD y otra recta EF, perpendicular á una de ellas, p. ej., á la CD, tambien lo será á la otra AB.

Infiérese esta verdad de lo dicho acerca de la igualdad de los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes. Tomando en el caso presente los ángulos correspondientes CNF, AMF, la igualdad de estos ángulos nos dará por resultado que el ángulo AMF es recto, por serlo su correspondiente CNF; luego la línea EF, que forma con la AD un ángulo recto, será perpendicular á esta línea.

9. *Dos paralelas* AB, CD. (fig. 33) *equidistan por todos sus puntos.*

Por de contado, la perpendicular EF ó GI, comun á las dos rectas AB, CD, es la línea mas corta que desde el punto E ó G podemos tirar á la CD: esta perpendicular, pues, medirá para los puntos E ó G, la distancia de las dos paralelas. Asi pues, la cuestion queda reducida á demostrar la igualdad de las perpendiculares EF, GI.

Para hacer palpable esta demostracion, levantarémos sobre el punto M punto medio de EG, la perpendicular MN, la cual lo será tambien en el punto N á la paralela CD. Doblando el plano por la línea MN, sobrepondrémos la porcion B M N D á la A M N C; siendo rectos todos los ángulos de la figura, la línea MG tomará la direccion ME; y como MG=ME, el punto G vendrá á caer sobre el punto E. Entretanto G I tomará la direccion EF, y N I la direccion NF; luego el punto I debe estar á la vez en la línea EF y en la NF; luego se confundirá con la interseccion de estas dos líneas, á saber, con el punto F, así, pues, GI y EF se han confundido exactamente; luego GI=EF. L. Q. Q. D.

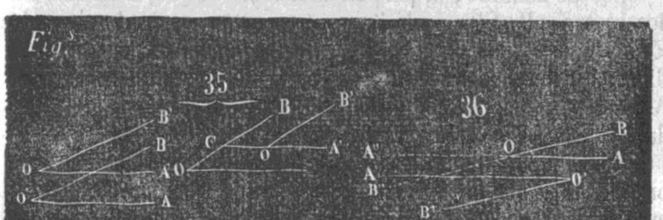
Recíprocamente *si dos rectas están por todos sus puntos á igual distancia, dichas rectas serán paralelas.*

Porque las rectas que se hallen en este caso, jamás podrán encontrarse; luego serán paralelas.

10. *Partes de paralelas* AB, CD *comprendidas entre paralelas* AC, BD, *son iguales.* (fig. 34.)

Segun acabamos de ver, este teorema no ofrece dificultad alguna respecto de las perpendiculares AE, CF. Nos concretaremos, pues, á las oblicuas AB, CD. Para esto tendrémos en consideracion que los ángulos GAE, GCF son ángulos rectos; y que los GAB, GCD son iguales por correspondientes. Si quitamos, pues, de los dos ángulos rectos GAE, GCF los correspondientes iguales entre sí GAB, GCD, BAE =DCF; y si colocamos CF sobre su igual AE, CD caerá sobre AB, FD sobre EB, y el punto B quedará confundido con el D. Así pues, AB y CD, partes de paralelas oblicuas, son iguales, así como las AE y CF.

11. 1.° *Dos ángulos* AOB. A'O'B' (fig. 35) *que tienen sus lados respectivamente paralelos, y dirigidos en un mismo sentido, son iguales.*



Esta verdad se hace palpable prolongando, si es necesario el lado A'O', hasta que se encuentran con el lado OB en un punto tal como C, en cuyo caso nos resultará por la propiedad de los ángulos correspondientes.

AOB=A'CB; pero A'CB=A'O'B'; luego AOB=A'O'B'.

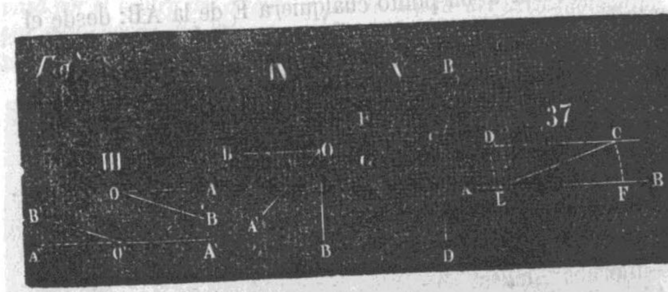
2.° *Dos ángulos* AOB, A'O'B' *(fig. 36) que tienen sus lados respectivamente paralelos y en direccion contraria son iguales.*

En efecto, supongamos que OA'' sea la prolongacion del lado OA; y OB'' la prolongacion de OB, tendremos en este caso que:

AOB=A''OB'' y A'OB'' ,=A'O'B' luego AOB=A'O'B'.

3.° *Dos ángulos son suplementarios, cuando los lados del uno son respectivamente paralelos á los del otro, pero no dirigidos á la vez en el mismo sentido, ni en sentido contrario.*

Supongamos (fig. III) el lado OA en la misma direccion que O'A'; y OB en direccion contraria á O'B. Prolongaremos uno de los cuatro lados: sea p. ej. O' A'' la prolongacion de O'A'; los ángulos A'O'B', A''O'B' serán suplementarios; pero este último A''O'B' es igual al AOB por tener sus lados en direccion contraria: luego etc.



De lo dicho podemos inferir que *los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó son iguales ó suplementarios.*

12. 1.° *Los ángulos de una misma especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales.*

Supongamos (fig. IV) que los dos sean agudos, tales como los AOB, A'O'B' y que tengan un vértice comun.

Esta suposicion nos dará:

AOB=1 recto—A'OB, y A'OB'=1 recto—A'OB; así pues AOB=A'OB'.

2.° *Los ángulos de diferente especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios entre sí.*

Sean los ángulos (fig. V) BCD, GCH, el primero obtuso y agudo el segundo.

Los ángulos BCH, DCG valen dos rectos: luego los dos restantes BCD, GCH valdrán igualmente dos rectos, porque todos los ángulos formados en un plano al rededor de un punto, valen cuatro rectos. Así pues, los ángulos BCD, GCH que valen dos rectos, serán suplementarios entre sí.

De donde se infiere *que los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, ó son iguales ó suplementarios.*

13. *Por un punto* C *dado fuera de una recta* AB, *tirar una paralela á esta recta* (fig, 37).

Para verificar esta construccion, desde el punto C tiraremos una recta á un punto cualquiera E de la AB: desde el punto E como centro y con rádio igual á EC, describirémos un arco CF, que corte en F á la AB; igualmente desde el punto C como centro, y con el mismo radio EC, trazaremos el arco ED; desde el punto C como centro, y con un rádio igual á la cuerda del arco CF, formaremos un arco pequeño de círculo que corte al arco ED en un punto D; finalmente tirarémos la recta CD.

La recta CD será la paralela pedida; supuesto que la secante EC forma con las dos rectas EF, CD, los ángulos alternos-internos iguales.

14. Son innumerables las aplicaciones de las paralelas en las artes industriales.

Los carpinteros hacen uso todos los dias en la construccion de puertas, ventanas y persianas; los pizarreros, en la disposicion de las tejas ó de las pizarras; los impresores en las líneas; el labrador forma los surcos en las líneas parale-

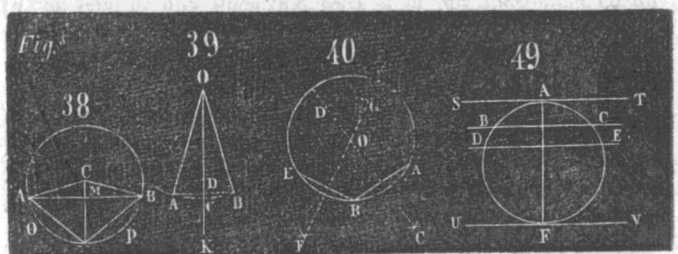
las; el grabador, cuando quiere representar superficies planas en que una parte se aleja del espectador, tambien emplea líneas rectas paralelas; la música hace uso igualmente de las paralelas para poner las notas de que se vale, etc.

§. VI. *Del círculo y de las perpendiculares, de las secantes, de las tangentes, de los ángulos y de las paralelas consideradas con relacion al círculo.*

1. *Una recta y una circunferencia no se pueden cortar en mas de dos puntos.*

Supongamos por un momento que la recta cortase á la circunferencia en tres puntos, tirando tres radios á los puntos de interseccion, tendriamos tres rectas iguales bajadas desde un mismo punto á una recta; lo cual no puede verificarse, sin que se atraviese uno de estos inconvenientes, á saber, ó que tengamos dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular, ó que una oblicua sea igual á la perpendicular: ambas consecuencias son incompatibles con los teoremas demostrados.

2. *Toda perpendicular* CN *á una cuerda* AB *en su mitad pasa por el centro del círculo y por la mitad del arco subtendido por esta cuerda* (fig 38).



Efectivamente, toda vez que CN es perpendicular á AB en su mitad, el punto C equidistará de los dos puntos A y B; pero AC y CB son iguales, por ser radios del mismo círculo;

luego esta perpendicular pasará por el centro, punto equidistante de A y de B.

Por otra parte, perteneciendo el punto N á la perpendicular CN, se hallará á igual distancia de los A y B, resultando AN=NB: de donde AN y NB serán dos cuerdas iguales; luego tambien serán iguales los arcos subtendidos AON, NPB. Asi la pues, perpendicular pasa por el medio del arco subtendido porla cuerda AB, dividiéndole por consiguiente en dos partes iguales.

3. *El radio perpendicular á la cuerda* AB, *divide á esta y al arco subtendido en dos partes respectivamente iguales* (fig. 39).

La demostracion de esta verdad se funda en una propiedad característica de las perpendiculares. Por esta propiedad si la línea CN tiene un punto equidistante de los puntos A y B de la línea AB, los tendrá todos á igual distancia de A y de B; pero el punto C de la línea CN equidista de A y de B; luego tambien M que pertenece á la misma recta, equidistará de A y de B: luego AM=BM.

Por la misma razon el punto N equidistará de A y B; luego las cuerdas AN BN serán iguales: luego tambien lo serán los arcos subtendidos AON, BPN.

Recíprocamente *el radio* CN, *que divide la cuerda* AB *en dos partes iguales* AM, BM, *será perpendicular á la cuerda* AB (fig. 38).

Porque tendrá dos puntos C, M equidistantes de A y de B.

4. *Dividir un ángulo* AOB *y un arco* ACB *en dos partes iguales* (fig. 39).

Desde el vértice O como centro y con un rádio arbitrario OA, trazarémos el arco ACB, que corte a los dos lados del ángulo en A y en B; marcarémos un punto cualquiera K á igual distancia de los puntos A y B; finalmente tirarémos la recta OK.

Esta recta será la bisectriz deseada.

En efecto, si tiramos la cuerda AB, la recta OK será perpendicular sobre su mitad. Por consiguiente esta recta divide el arco ACB y el ángulo correspondiente en dos partes iguales.

5. *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco de círculo.* (fig. 40.).

Tomaremos sobre la circunferencia tres puntos A, B, E que uniremos por medio de las cuerdas AB, EB; levantarémos sobre sus mitades dos perpendiculares respectivamente, tales como CD, FG; el punto O de interseccion será el centro del círculo, supuesto que por este punto deben pasar ambas perpendiculares.

6. *Hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados, que no se hallen en una misma recta.*

Supongamos los tres puntos A, B, E (fig. 40). Haremos con estos tres puntos lo mismo que hemos hecho en la construccion anterior. Unirémos estos puntos por medio de dos rectas, y sobre sus mitades levantaremos dos perpendiculares respectivamente; el punto O de interseccion será el centro de la circunferencia. Para trazarla, tómese como rádio la distancia AO, ó BO, ó EO. Estas tres distancias son iguales efectivamente; porque el punto O, como perteneciente á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda AB, se halla á igual distancia de A y de B; pero correspondiendo tambien el mismo punto á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda BE, equidistará de B y de E. Luego AO=BO=EO

7. *La tangente* IG *no puede encontrar la circunferencia en mas de un punto* (fig .6.)

Esta verdad se infiere de la misma definicion de la tangente, la cual es una línea que toca á la circunferencia en un punto solo.—Dedúcese de aqui:

El radio OH *es la recta mas corta que desde el centro podemos tirar á la tangente.*

8. *La perpendicular* IG *levantada sobre la extremidad de un rádio* OH, *es tangente á la circunferencia de este punto.*

Facilmente nos convencerémos de esta verdad, si consideramos que cualquier otro punto de la perpendicular está mas distante del centro que el punto H; de consiguiente, esta perpendicular no tiene mas que un punto comun con la circunferencia: luego será tangente.

Reciprocamente la tangente es perpendicular al rádio que termina en el punto de tangencia.

En efecto, otro punto cualquiera de la tangente está mas distante del centro que el punto de la tangencia; luego este radio es la distancia mas corta del centro á la tangente; esta propiedad pertenece exclusivamente á la perpendicular; luego etc.

9. *Tirar una tangente por un punto dado en la circunferencia.*

Para resolver este problema, tirarémos un rádio que termine en el punto dado, levantarémos sobre este punto una perpendicular al rádio; esta línea será, segun lo que acabamos de demostrar, la tangente pedida.

10. *Dos parelelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.*

Tres casos nos puede presentar este teorema.

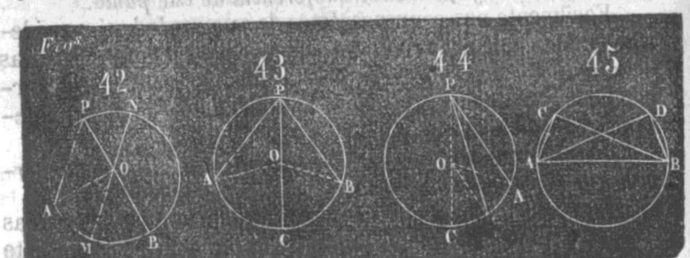
Primer caso. Si las paralelas son dos secantes BC, DE, (fig. 49), el diámetro que sea perpendicular á estas rectas, cortará la circunferencia en dos puntos A, F, equidistantes de los puntos B y C por una parte, y por otra, de los D, y E. De donde resultará: *arco* AD=*arco* AE, y *arco* AB=*arco* AC; restando estas igualdades, tendremos: *arco* AD—*arco* AB= *arco* AE—*arco*AC; y finalmente *arco* BD=*arco* CE.

Segundo caso. Si entre las paralelas, la una es tangente como ST, ó UV, y la otra secante, como BC, el diámetro AF pasará por el punto de tangencia A ó F y cortará el arco BAB ó BFC en dos partes iguales. De donde se infiere que:

AB=AC, ó FB=FC.

Tercer caso. Si las paralelas son dos tangentes, ST, UV, la recta AF, que pasa por los puntos de tangencia será un diámetro; de consiguiente los arcos ABDF, ACEF, iguales á la semicircunferencia, son iguales entre sí.

11. *Todo ángulo inscrito APB es igual á la mitad del ángulo del centro que corresponde al mismo arco de círculo* (fig; 42).



Supongamos para esto que uno de los lados PB pasa por el centro; tirando un diámetro MON, paralelo á la cuerda AP, nos resultará el MOB, igual al ángulo propuesto APB, por ser su correspondiente; pero el ángulo MOB es puntualmente la mitad del AOD, como vamos á manifestar.

El ángulo MOB=PON, por ser verticalmente opuesto; PON=AOM, por ser iguales sus arcos correspondientes PN, AM, como interceptados por paralelas; luego MOB=AOM; luego MOB será igual á la mitad de AOB; pero MOB es igual al ángulo inscrito; luego el ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo en el centro, que comprende entre sus lados el mismo arco. L. Q. Q. D.

Si ninguno de los lados pasa por el centro tiraremos un diámetro auxiliar PC (fig. 43 y 44), cuya construccion nos dice que el ángulo inscrito es igual á la suma ó la diferencia de los ángulos APC, BPC, de donde sacaremos el mismo resultado, como muy sencillamente vamos á exponer.

El ángulo (APC fig. 43)$=\frac{AOC}{2}$; el ángulo APC$=\frac{BOC}{2}$; sumando estas dos ecuaciones, tendremos la suma siguiente:

$$APC+BPC=\frac{AOC+BOC}{2} \text{ ó } APB=\frac{AOB}{2}$$

Lo mismo tendrá lugar con el ángulo APB (fig. 44), porque el ángulo APC$=\frac{AOC}{2}$; el BPC$=\frac{BOC}{2}$: y restando estas igualdades nos resultará.

$$APC—BPB=\frac{AOC—BOC}{2}; \text{ ó lo que es lo mismo: } APB=\frac{AOB}{2}.$$

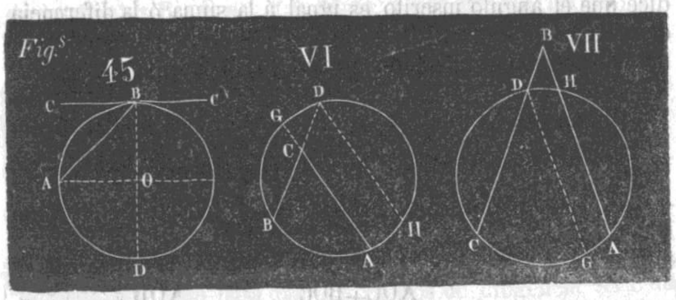
2.° Supuesto que el ángulo del centro tiene por medida el arco interceptado por sus lados;

El ángulo inscrito tendrá por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

12. *Todo ángulo* ABC, ADB *inscrito en un semicírculo es recto.* (fig. 45).

Este teorema se infiere inmediatamente del anterior. El ángulo que tomamos en consideracion, tiene por medida la mitad del arco interceptado por sus lados; pero este arco es la semicircunferencia, que vale 180°, luego el valor de este ángulo será de 90°, es decir será recto.

Podemos considerar como *límite* de los ángulos inscritos el ángulo CBA, formado por la tangente CC' y la cuerda AB, que se cortan en el punto B de tangencia; el teorema precedente es igualmente aplicable á este ángulo, como vamos á manifestar.



Si la cuerda propuesta fuese un diámetro, la propiedad enunciada seria evidente. Supongamos pues el caso contrario; y tiraremos el diámetro BOD y el rádio OA; el ángulo recto CBD valdrá la semisuma de los ángulos suplementarios BOA, DOA; pero segun hemos dicho,

$$ABD=\frac{AOD}{2}; \text{ luego } CBA=\frac{BOA}{2}.$$

Lo que decimos del ángulo agudo CBA, se puede aplicar al obtuso C'BA.

Asi pues, *el ángulo inscrito, formado por una cuerda y una tangente, tiene tambien por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

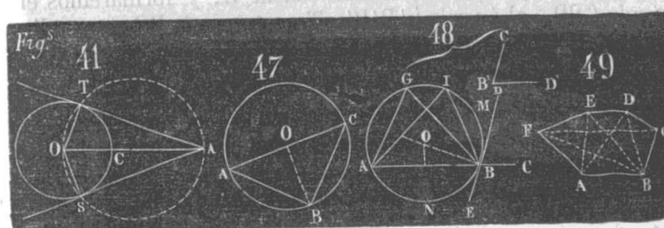
13. *Todo ángulo* ACB, *formado por dos cuerdas* AG, BD, *que se cortan en el círculo, tiene por medida la semisuma de los arcos* AB, GD, *comprendida entre sus lados.*

Para convencernos de esta verdad, tiraremos (fig. VI) la la cuerda DH, paralela á la GA, cuya construccion nos dará el ángulo inscrito BDH, que tiene por medida la semisuma de los arcos BA, AH; pero AH=GD; luego este ángulo y por consiguiente ACB, tiene por medida la semisuma de los arcos AB, GD.

14. *El ángulo* ABC, *formado por dos secantes como* BA, BC *tiene por medida la mitad de la diferencia de los arcos* HD, AC, *interceptados por sus arcos.*

Tirando la cuerda (fig. VII) paralela á la secante BA, nos resultará el ángulo inscrito GDC, que tiene por medida el arco $\frac{CC}{2}$; pero CG=AC—AG; luego su medida será la mitad de la diferencia de los arcos AC, AG, ó lo que es lo mismo, la mitad de la diferencia de los arcos interceptados AC, HD.

15. *Por un punto* A *dado fuera del círculo, tirar una tangente al círculo* (fig. 41).



La resolucion de este problema exige la siguiente construccion. Uniremos el punto dado y el centro del círculo por medio de la recta AO; sobre esta recta como diámetro construiremos una circunferencia que cortará al círculo dado en dos puntos, tales como S, T; en el círculo trazaremos dos radios que terminen respectivamente en los puntos de interseccion S, T; uniremos estos puntos con el lado por medio de las rectas SA, TA; estas dos rectas satisfarán á las condiciones del problema.

En efecto, los ángulos OSA, OTA son rectos, como inscritos en la semicircunferencia del círculo AO; luego estas rectas son respectivamente perpendiculares á los radios OT, ON; serán, pues, tangentes al círculo dado.

46. *Levantar una perpendicular sobre el extremo de una recta.*

Sea la recta AB (fig. 47). Tómese fuera de esta recta un punto arbitrario O, y con el radio OB se trazará un círculo que corte á la recta AB en un punto A. Tírese ahora el diámetro AOC y la cuerda BC.

La recta BC será la perpendicular pedida; porque el ángulo ABC, como inscrito en la semicircunferencia, será recto; y la BC por consiguiente perpendicular a AB.

47 *Describir sobre una línea un segmento capaz de un ángulo dado* C'B'D' (fig. 48).

(Llámase *segmento capaz de un ángulo dado*, un segmento tal, que todos los ángulos que puedan ser inscritos, sean iguales al ángulo dado).

Sea AB la línea sobre la que nos proponemos describir el segmento. La prolongaremos hácia C, y formaremos el ángulo CBD=al ángulo C'B'D'. Trazaremos la BQ perpendicular á la BD y la HO perpendicular á AB en su mitad. Del punto O de interseccion de las dos perpendiculares, como centro y con un radio OB describiremos un círculo: ANB será el segmento pedido.

En efecto, el ángulo C'B'D'=CBD=ABE; este último, como formado por una cuerda y una tangente, tiene por medida la mitad del arco ANB. Pero esta es exactamente la medida de todos los ángulos AGB, AIB etc., inscritos en el segmento. Luego etc.

2.ª SECCION.=DE LAS FIGURAS PLANAS FORMADAS POR MAS DE DOS LINEAS.

§. I. *De los polígonos en general.*

1. Llámase *polígono*, la porcion de plano limitado por mas de dos rectas, que se cortan dos á dos.

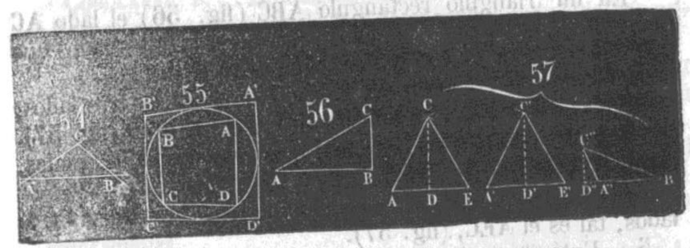
Las rectas que forman el polígono, se llaman *lados* del polígono; sus puntos de interseccion *vértices*; y sus ángulos, *ángulos* del *polígono*.

Entendemos por *diagonales* las rectas AC, AD, BD, BE, CE (fig. 49,) que unen dos á dos los vértices de los ángulos no adyacentes á un mismo lado.

El conjunto de los lados se llama *perímetro* ó *contorno* del polígono.

2. Para limitar un plano, son necesarias; por lo menos tres rectas; así es que un polígono no puede tener menos de tres lados.

3. El *triángulo* es el polígono mas sencillo de todos; se compone de tres lados y de tres ángulos, tal es la figura ABC (fig. 54).



4. El polígono de cuatro lados se llama *cuadrilátero*; *pentágono* el de 5 lados; *hexágono* el de 6; *heptágono* el de 7, *octágono* el de 8, *decágono* el de 10; en fin polígono de 11, 12, 13 etc. lados.

5. Se dice un polígono *equilateral*, cuando tiene iguales todos sus lados; *equiangular*, el que tiene iguales sus ángu-

los; *regular*, el que tiene iguales todos sus ángulos y lados; *irregular*, cuando le falta uno de estos dos requisitos.

6. Un polígono ABCD (fig. 55) se dice *inscrito* á un círculo, cuando todos sus lados son cuerdas del círculo, y recíprocamente el círculo se dice en este caso circunscrito al polígono.

Un polígono A′B′C′D′ se dice *circunscrito* á un círculo, cuando todos sus lados son tangentes al círculo, y recíprocamente el círculo se dice inscrito al polígono.

§. II. *Del triángulo y de sus diferentes especies.*

1. Siendo la recta la línea mas corta que de un punto á otro podemos tirar, *cualquiera de los lados de un triángulo será menor que la suma de los otros dos.*

2. De dos modos podemos considerar el triángulo: 1.° segun la relacion del valor de sus ángulos; 2.° segun la magnitud relativa de sus lados.

3. Un triángulo se dice *acutángulo*, *obtusángulo*, *rectángulo*, segun que el mayor de sus ángulos sea agudo, obtuso, ó recto.

En un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) el lado AC opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*, y los lados que forman el ángulo recto, reciben el nombre de *catetos*.

4. Llámase *escaleno* el triángulo en el que los tres lados, comparados dos á dos, son desiguales p. ej. A″B″C″ (fig. 57).

Isósceles ó simétrico, es aquel que tiene dos lados iguales, como el A′E′C′ (fig. 57).

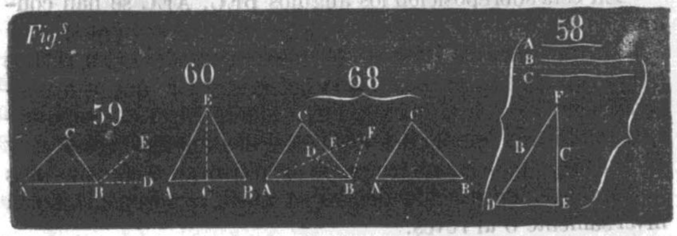
Dícese *equilateral*, el triángulo que tiene iguales sus tres lados, tal es el AEC, (fig. 57).

5. Entendemos por *altura* de un triángulo la perpendicular bajada desde uno de sus vértices al lado opuesto que se prolongará si es necesario; tales son CD C′D′ C″D″ (fig. 57).

Se llama *base* del triángulo el lado opuesto al vértice, de donde se baja la perpendicular. En el triángulo isósceles se llama *base* el lado desigual, y *lados* de este triángulo los dos lados iguales.

TEOREMAS RELATIVOS Á LOS TRIÁNGULOS. Demostrar que:

6. *La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera* ABC (fig. 59), *es igual á dos ángulos rectos.*



Para demostrar este teorema, prolongaremos uno de los lado AB, p. ej. formando el ángulo exterior CBD; en este ángulo tiraremos la recta BE paralela á AC cuya construccion nos dará:

$CBE=BCA$ por alternos internos, y $DBE=CAD$ por correspondientes; de donde $ABC+BCA+CAB=ABC+CBE+EBD=2$ rectos.

COROLARIO 1.° El ángulo exterior CBD de un triángulo ABC es igual á la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes DAC ACB.

COROLARIO 2.° Los dos ángulos agudos A, C, de un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) valen 90 grados ó un ángulo recto.

7. *Cuando los dos lados* AE,BE *de un triángulo* ABE (fig. 60) *son iguales, los ángulos opuestos son tambien iguales; ó en otros términos, en un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.*

DEMOSTRACION. Sobre el punto medio C del tercer lado AB levantaremos una perpendicular. Como los dos lados AE BE, son iguales, la perpendicular pasará por el vértice E, formando dos triángulos CEB, CEA, los cuales se confundirán exactamente, si doblamos la figura por la perpendicular CE, ajustándose en esta sobreposicion el lado BC con el AC y el EB con el EA, y en consecuencia el ángulo B con el ángulo A:

de donde resulta la igualdad de los dos ángulos A y B, opuestos á los lados iguales EB, EA.

Por la misma razon en un *triángulo, á iguales ángulos se oponen lados iguales.*

En esta sobreposicion los ángulos BEC, AEC se han confundido tambien, de donde se infiere legítimamente que:

En un triángulo isósceles la línea bajada desde su vértice á la base sobre su mitad, es una perpendicular; que esta perpendicular divide á la base en dos partes iguales, asi como divide tambien el ángulo del vértice en dos ángulos iguales; y finalmente que divide el triángulo primitivo en dos triángulos rectángulos que se confunden exactamente, sobreponiéndolos inversamente ó al reves.

Las figuras que de este modo se confunden, se llaman *simétricas*; y he aqui la razon, porque el triángulo isósceles se llama tambien simétrico.

En las artes se nos ofrecen ejemplos muy notables de las figuras métricas. El grabado, la imprenta, la litografía etc. tienen por objeto formar una lámina de madera, metal, piedra etc., figuras, cuya impresion ha de trasladarse sobre otras superficies. Es necesario observar que la figura impresa está al reves respecto de la que hay en la lámina; porque la derecha se imprime á la izquierda, y la izquierda á la derecha. Sobre la lámina pues, se debe escribir al reves, si se quiere que lo escrito se reproduzca en su sentido natural. Esta es la razon, porque los caractéres de imprenta están grabados al revés y colocados unos despues de otros de derecha á izquierda, á fin de que en el papel estén en su forma natural, y se sigan de izquierda á derecha.

§. III. *Comparacion de los triángulos.*

1. La comparacion de los triángulos puede presentar tres casos diferentes; de igualdad, de semejanza y de equivalencia. Nos concretaremos por ahora á la igualdad.

Teoremas relativos á la igualdad de los triángulos.

2. 1.° *Dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son iguales, cuando*

tienen sus tres lados respectivamente iguales, á saber: AB=A′B′, AC=A′C′, BC=B′C′ (fig. 68).

Demostracion. Aplicando el lado A′ B′ sobre su igual AB, y el triángulo A′B′C′ sobre el plano ABC, de modo que sus lados iguales se correspondan; los dos triángulos coincidirán exactamente en esta sobreposicion.

Supongamos por un momento que esto no tuviera lugar; el punto C′. p. ej., ó caería dentro del triángulo ABC en el punto D, ó sobre el lado BC, en E, ó por fin fuera del triángulo en el punto F.

En el primer caso resultaría un absurdo, á saber que: $AD+BD<AC+CB$, ó $A'C'+C'B'<AC+CB$: como vamos á manifestar del modo siguiente:

$AD+DE<AC+CE$, por ser la primera suma el lado AE, menor que la suma de los otros dos;

por la misma razon, $BD<EB+DE$;

sumando entre sí ordenadamente estas dos desigualdades, tendremos:

$$AD+DE+BD<AC+CE+EB+DE:$$

y quitada la parte DE de los dos miembros:

$$AD+BD<AC+CE+EB;$$

ó finalmente $AD+BD<AC+CB$; resultado contrario á la suposicion que hemos hecho.

En el segundo resultará el mismo inconveniente:

$$BE<BC, \text{ ó } B'C'<BC.$$

En el tercer caso tendremos que:

$$AC<CE+AE;$$

$$BF<BE+FE;$$

$$\text{y sumando } AC+BF<CE+AE+BE+FE,$$

$$\text{ó } AC+BF<AF+BC$$

ó lo que es lo mismo, $AC+B'C'<A'C'+BC$;

Resultado igualmente absurdo. Asi pues, el punto C′ caerá sobre el punto C, y por consiguiente los triángulos se confundirán. L. Q. Q. D.

2.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen igual un án-*

gulo A=A', *comprendido entre dos lados respectivamente iguales* (fig. 68).

La sobreposicion nos dará la igualdad de estos triángulos.

Colocaremos el lado A'B' sobre su igual AB y el triángulo A'B'C' sobre el plano ABC, de modo que se correspondan los lados y los ángulos iguales; siendo el ángulo A' igual al ángulo A, el lado A'C' tomará la direccion AC; y como A'C'=AC, el punto C' caerá sobre el punto C: luego los dos triángulos coincidirán perfectamente.

3.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual,* AB=A'B' *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 68).

Sobrepondremos el lado A'B' á su igual AB, y el triángulo A'B'C' al plano ABC, de suerte que se correspondan los ángulos iguales: como A'=A, el lado A'C' tomará la direccion AC; y como B'=B, el B'C' tomará la direccion BC. Hallándose pues á la vez el punto C' sobre AC y sobre BC coincidirá con el punto C, y los dos triángulos se confundirán exactamente.

Corolario. *Dos triángulos rectángulos serán iguales, si tienen iguales las hipotenusas y un ángulo agudo.*

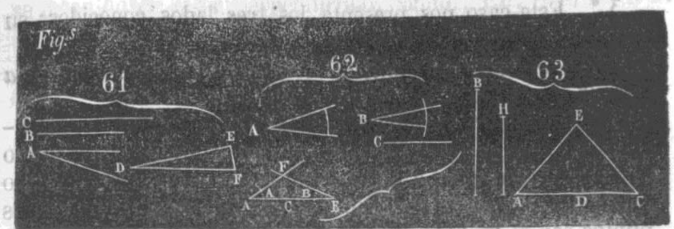
3. *Dos triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, son tambien iguales.*

Por medio de la sobreposicion puede cualquiera convencerse de la igualdad de estos triángulos.

4. *Construir el triángulo, dados sus tres lados* A,B,C, (fig. 58).

Trazaremos una recta DE igual al lado A, desde el punto D con un radio B describiremos un arco, y desde el punto E con el radio C trazaremos un segundo arco que corte al primero en F; finalmente desde F tiraremos las rectas FD, FE y tendremos un triángulo DEF, cuyos lados serán las rectas dadas.

5. *Construir un triángulo conociendo*: 1.° *dos lados* B, C, *y el ángulo* A que forman estos lados (fig. 61); 2.° los dos ángulos A, B, y el lado C *adyacente á estos ángulos* (fig. 62).



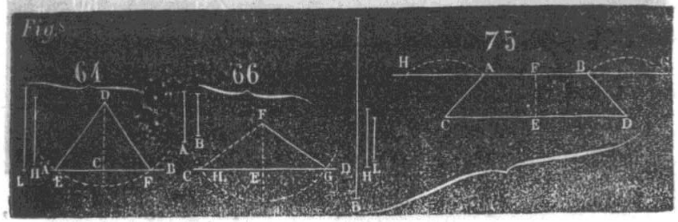
1.° Formaremos un ángulo D igual al ángulo A, dando á sus lados las longitudes B, C; tírese la recta EF; el triángulo DEF será el triángulo pedido.

2.° Trácese una recta igual á la recta dada C; sobre A E se formará en el punto E un ángulo igual á B, igualmente sobre el extremo A otro ángulo igual á A. Los otros dos lados, cortándose en el punto F, completarán el triángulo AEF, que satisface á las condiciones pedidas.

6. *Trazar un triángulo isóceles, cuando se conocen:* 1.° *la base* B *y la altura* H (fig. 63); 2.° *la altura* H *y la longitud* L *de los lados iguales* (fig. 64); 3.° *la base* B *y la longitud* L *de los lados iguales.*

1.° Trácese una recta, igual á la base B; sobre la AC se levantará en su mitad una perpendicular igual á la altura H; finalmente uniremos el punto E con los puntos A y C; de este modo habremos formado el triángulo isóceles AEC.

2.° Sobre el medio de una recta AB levantaremos una perpendicular CD, igual á la altura H; desde el punto D con la longitud L, describiremos un arco que corte á la recta AB en dos puntos E, F; uniremos por fin el punto D con los puntos E, F, y resultará el triángulo isóceles E D F.



3.° Este caso nos presenta los tres lados conocidos; su resolucion pues, será la misma que la del núm. 4.

7. *Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* A *y un cateto* B (fig. 66).

Sobre una recta cualquiera CD levantaremos una perpendicular EF, igual en longitud al cateto dado: desde el punto F con un radio igual á la hipotenusa A, trazaremos un arco que cortará á la recta CD en dos puntos G, H; uniendo estos puntos con el F, habremos formado los dos triángulos FEG, FEH.

§. IV. *De los cuadriláteros.*

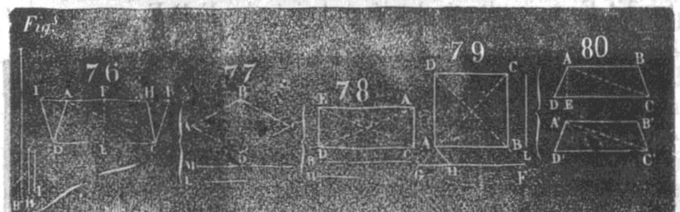
1. Se llama *cuadrilátero* un polígono de cuatro lados. Entre los cuadriláteros hay unos que son *paralelógramos*, y otros que no lo son. Entre estos últimos se cuentan el *trapezoide* y el *trapecio*.

El *trapezoide* que es el mas irregular de todos, no tiene lados paralelos entre sí.

El *trapecio* es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos; tal es el ABCD (fig. 75), en el que DC y AB son paralelos. Los dos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio; y la perpendicular EF, comun á las dos bases, es la *altura* del trapecio.

Llámase *simétrico* aquel trapecio que tiene iguales los dos lados no paralelos, AC, BD.

2. Llámanse *paralelógramos* los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos dos á dos; como el ABC, (fig. 76).



Dos lados opuestos cualesquiera del paralelógramo ABCD,

se dicen *bases*, y su perpendicular comun, EF, es la *altura* del paralelógramo.

Entre los paralelógramos se cuentan el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*.

El *romboide* es un paralelógramo que tiene desiguales los lados consecutivos, y los ángulos adyacentes á un lado; tal es ABCD (fig. 76).

El *rombo* se diferencia del anterior, en que tiene iguales todos sus lados; como ABCD (fig. 77).

El *rectángulo* tiene los lados consecutivos desiguales, pero iguales todos sus ángulos; tal el ACDE (fig. 78).

El *cuadrado* tiene iguales sus ángulos y sus lados; como ABCD (fig. 79).

3. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Para convencernos de esta verdad tiraremos en el cuadrilátero una diagonal; y de este modo quedará dividido en dos triángulos; pero la suma de los ángulos de estos triángulos, idéntica á la suma de los ángulos del cuadrilátero, es igual á 4 rectos: luego, etc.

4. *La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.*

Esta igualdad se conocerá tan pronto como reparemos en que los triángulos tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados.

5. *Construir un trapecio simétrico, conocidas la base mayor* B *la altura* H, *y la longitud* L *de los lados no paralelos,* (fig. 76).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; levantaremos sobre esta recta una perpendicular EF, igual á la altura H; por el punto F tiraremos una paralela á CD; desde los puntos C, y D, con un rádio igual á L, describiremos dos arcos, cada uno de los cuales cortará en dos puntos á esta paralela; uniendo ahora á los extremos de la base CD las intersecciones A, H, mas próximas al punto F, tendremos formado el trapecio simétrico AHCD,

6. *Construir un romboide conociendo la base* B, *la altura* H *y la longitud* L *de los lados que encuentran á la base* (fig. 76).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; en un punto cualquiera E levantaremos una perpendicular EF igual á la H. Por el punto F tiraremos una paralela á CD; trazaremos despues desde los puntos C, D, con un rádio L, dos arcos, cada uno de los cuales cortará á la paralela en dos puntos; finalmente uniendo á los C, D, las intersecciones A, B, ó H, I, tendremos los dos paralelógramos ABCD, CDHI que satisfarán á las condiciones del problema.

7. *Trazar un rombo conociendo un lado* L *y una diagonal* M, (fig. 77).

Tiraremos una recta AC igual á M; desde los puntos A, C, con un rádio L, trazaremos dos arcos que se cortarán en dos puntos B, D; dirigiendo ahora los cuatro rádios, determinados por las intersecciones, nos resultará el rombo ABCD.

Esta figura tiene muchas aplicaciones en las artes, los dibujos de las telas, la ebanistería etc. nos ofrece este ejemplo á cada paso.

8. *Formar un rectángulo dada la base* B *y la altura* H, (fig. 78).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; en el punto C ó en el D, levantaremos una perpendicular DE igual á H; por el punto E tiraremos una paralela á CD, y por C otra paralela á DE, la interseccion A de las paralelas determinará el rectángulo ACDE.

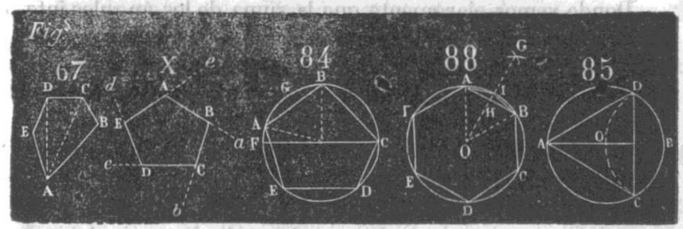
Son muy numerosas las aplicaciones del rectángulo: el sitio de un edificio es ordinariamente rectangular; en la agrimensura ocurre con frecuencia medir ó construir rectángulos.

9. *Construir un cuadilátero igual á otro dado* ABCD (fig. 80).

Para esta construccion no hay mas que tirar la diagonal AC, y formar sobre una recta A'C'=AC, dos triángulos A'B'C', A'C'D'. respectivamente iguales á los triángulos ABC, ACD.

§. V. *De los polígonos de cualquier número de lados.—De los polígonos regulares inscritos y circunscritos.*

1. *La suma de los ángulos de un polígono cualquiera* ABCDE (fig. 67,) *vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*



Para convencernos de esta verdad, desde un mismo vértice A, dirigiremos diagonales, á los demas vértices; estas diagonales dividirán el polígono en tantos triángulos, como lados tiene menos dos; luego la suma de los ángulos de estos triángulos será tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos; pero esta suma es idéntica á la de los ángulos del polígano; luego, etc.

Si se nos pide, p. ej., el valor de los ángulos de un polígono de 20 lados. quedará determinado de este modo: valor: $=(20-2)\times2$ rectos$=20\times2$ rectos-2×2 rectos$=40$ rectos-4 rectos. Cuyo resultad onos dice que para determinar el valor de los ángulos de un polígono, duplicaremos el número de ángulos rectos, que valen los del polígono.

Corolario. El teorema precedente nos conduce á la determinacion de cada uno de los ángulos iguales; de consiguiente dividiendo el valor de todos sus ángulos por su número, obtendremos el valor de cada uno; pero el número de ángulos es igual al de los lados; podemos pues dividir por el número de lados. Si queremos, p. ej., hallar el ángulo del decágono regular diremos:

$$\text{ángulo}=\frac{20R-4R}{10}=\frac{16R}{10}=1{,}6 \text{ de } R,=144.°$$

2 *Si prolongamos los lados del polígono* A B C D, *la suma de los ángulos exteriores que resultan, es igual á 4 rectos.* (fig. X).

En efecto, eAB+BAE=2R
aAC+CBA=2R
dCD+DCB=2R
. . . . ;

Donde vemos claramente que la suma de los ángulos interiores y exteriores del polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono. Asi pues, la suma total excede á la de los ángulos interiores en 4 rectos; luego la suma de los exteriores será igual á 4 rectos.

3. Llámase *centro* de un polígono regular inscrito ABCDE (fig. 84), el centro mismo O del círculo.

Entendemos por *rádio* del polígono regular el rádio del círculo circunscrito; y se dice *apotema* la distancia del centro á cualquiera de los lados ó sea el rádio del círculo inscrito. De donde se infiere que en el polígono regular son iguales sus rádios y sus apotemas.

Se llama *ángulo del centro* el ángulo AOB, formado por dos rádios AO, OB, dirigidos á dos vértices contiguos.

4. Si consideramos que todos los triángulos formados por los rádios y lados del polígono, son iguales como lo manifiesta la igualdad respectiva de los lados de este triangulo, conoceremos que todos los ángulos del centro son iguales entre sí. Luego para determinar el ángulo del centro, dividirémos por el número de lados del polígono los 4 rectos ó 360.°, valor de todos los ángulos que al rededor de un punto se pueden formar.

Si queremos p. ej. hallar el ángulo del centro en el pentágono regular procederemos del modo siguiente: ángulo del centro$=\frac{360.°}{5}=72.°$: este angulo pues, tendrá por medida el arco AGB, que será la quinta parte de la circunferencia.

5. *Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.*

1.° Porque el polígono regular son iguales los rádios; luego si con el rádio del polígono trazamos una circunferencia, esta circunferencia pasará por todos los vértices del polígono.

2.° Los apotemas son iguales; luego si con el apotema describimos una circunferencia, esta será tangente á todos los lados del polígono regular.

6. *Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados.*

Fórmese el ángulo del centro; descríbase la cuerda de su arco: esta cuerda será el lado del polígono que nos proponemos inscribir.

7. *Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados* (fig. 88).

Divídase el arco correspondiente tal como el AIB, en dos arcos iguales AI, IB; desde el punto I tírense las cuerdas IA, IB: cada una de estas cuerdas será el lado del polígono pedido.

8. *Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.*

Por todos los vértices del polígono inscrito tiraremos tangentes á la circunferencia: estas tangentes determinarán el polígono que queremos circunscribir.

9. *El lado del hexágono regular es igual á su rádio* (fig. 88).

Formarémos el triángulo AOB, el cual no puede menos de ser equiangular, como resulta de las consideraciones siguientes. El ángulo del centro$=\frac{4}{6}$ de recto$=\frac{2}{3}=60.°$: luego la suma de los otros dos ángulos A y B valdrá 120.°; pero estos dos ángulos son iguales, por ser iguales los lados AO. BO; luego cada uno de estos dos ángulos valdrá la mitad de 120.°, ó sea 60.° Asi pues, este triángulo es equiangular y por consiguiente equilátero. Luego AB=AO=BO.

10. *Inscribir el hexágono regular* (fig. 88).

Tómese el rádio OA, y desde el punto A lo colocaremos seis veces sobre la circunferencia; uniendo los seis puntos asi determinados, obtendremos el hexágono regular ABCDEF, cuyo perímetro, por consiguiente, será igual seis rádios ó tres diámetros del círculo circunscrito.

1.° Corolario. De donde se infiere que, siendo la circunferencia mayor que el polígono inscrito *toda circunferencia será mayor que tres diámetros.*

2.° Para inscribir un triángulo equilateral podemos hacer la construccion siguiente.

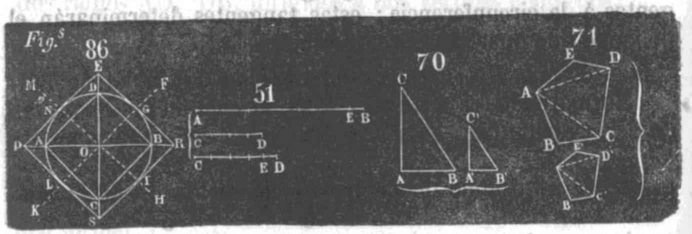
Trácese el diámetro AB (fig. 85), y desde el punto B, con una abertura de compas igual al rádio, descríbase un arco que corte la circunferencia en los puntos C, D: la línea DC será el lado del triángulo equilátero que nos proponemos inscribir.

11. *Inscribir un cuadrado.*

Tírense los diámetros AB, CD perpendiculares entre sí, despues, por medio de las rectas DB, DA, CB, CA, únanse los cuatro puntos A, C, B, D: quedará de este modo inscrito el cuadrado pedido.

12. *Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro cuadrado.*

Sea el cuadrado ACBD (fig. 86): desde los puntos B y D,



con un rádio cualquiera, mayor que la mitad de BD, trazaremos dos arcos que se corten en F; uniendo este punto con el centro O, la línea FO determinará el punto G; hágase lo mismo con los demas puntos tomados dos á dos; tirando ahora cuatro tangentes á la circunferencia por los puntos determinados de este modo, tendremos el cuadrado circunscrito PERS.

A primera vista se percibe que el perímetro de este cuadrado es igual á cuatro diámetros.

De aquí resulta que, siendo el polígono circunscrito mayor que la circunferencia inscrita, *el valor de esta no llegará á cuatro diámetros.*

13. *La determinacion del perímetro del círculo consiste en hallar una línea recta, igual en longitud á la circunferencia, para compararla con el rádio ó con el diámetro.*

Para resolver este problema no tenemos otros medios que los de aproximacion; aproximacion que podemos llevar hasta tal punto que equivalga á la exactitud.

Supongamos, inscrito uno, y circunscrito otro, dos polígonos regulares de un número indefinido de lados, por ejemplo de 32768 lados, no cometeremos un error muy grande, si tomamos uno de estos polígonos por el círculo. En este caso el perímetro se habrá convertido en la circunferencia, y el apotegma en el rádio.

El polígono de 32768 lados inscrito á un círculo cuyo rádio es un pie, tiene un perímetro representado por 62.831852. La relacion de este número con el diámetro que vale dos rádios, será 3,1415926: Así pues, la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro está expresada por el número 3,1415926, número que no difiere del verdadero en una diezmillonésima; es decir que la circunferencia contiene la diezmillonésima parte del diámetro, mas de 31415926, veces y menos de 31415927 veces.

Esta relacion se designa generalmente en los tratados de Geometría con la letra λ del alfabeto griego.

Como la relacion de la circunferencia con el diámetro es de un uso tan frecuente, en lugar del número 3,1415926, poco accesible á la memoria, se suele tomar la razon mas exacta, pero mas sencilla, 22:7. Este número, convertido en decimales, produce la fraccion 3,142 etc. y conviene con el anterior 3,1415 etc. hasta centésimas inclusive. Bastará pues, en los casos ordinarios tomar para circunferencia de una figura circular 3 veces el diámetro mas un $\frac{1}{7}$. El descubrimiento de esta relacion se debe á Arquímedes.

La relacion encontrada por Mecio es mas aproximada que la de Arquímedes, y al mismo tiempo muy fácil de conservar en la memoria. Esta razon está expresada por el número $\frac{355}{113}$ que muy pronto reproduciremos, si retenemos en la memoria el número 113355, que resulta del conjunto de las cifras del denominador y del numerador.

§. IV. *De las líneas proporcionales y de los polígonos semejantes.*

1. Cuando comparamos entre sí dos líneas ó dos números el resultado de esta comparacion se llama *razon*.

2. Entendemos por *medida comun* de dos líneas, una tercera línea contenida exactamente en las dos primeras.

Para hallar la razon de dos líneas AB, CD (fig. 51) se coloca la mas pequeña CD sobre la mayor AB, tantas veces como puede ser contenida; si cabe un número exacto de veces, la razon entre las dos líneas tendrá por expresion un número entero, y la operacion quedará terminada.

Pero supongamos que la línea AB contiene tres veces á la CD, quedando el resíduo EB; sobrepondremos este resíduo EB á la CD, y si cabe p. ej. exactamente 4 veces, la línea AB igual á tres veces la línea CD, mas el resíduo EB, contendrá trece veces la EB; de donde resulta que la razon de CD á AB será $\frac{4}{13}$, pudiendo formar la siguiente proporcion: AB: CD::13:4.

La línea CB, que cabe cuatro veces en la CD, y 13 en la AB, es la *comun medida* de estas dos líneas.

3. Llámanse *líneas comensurables entre sí* aquellas cuya razon se puede expresar numéricamente, como las líneas AB, CD del ejemplo precedente.

Por el contrario, se llaman *incomensurables* aquellas cuya razon no se puede expresar numéricamente, ó en otro términos, aquellas que no tienen una medida comun. Sin embargo, podemos valuar la relacion de estas líneas hasta tal grado de aproximacion, que equivalga á la exactitud.

En efecto, supongamos la línea AB (fig. 51) dividida en un número cualquiera de partes igules, y que una de estas partes se coloca sobre la CD tantas veces como sea susceptible: en esta division claro es que nos quedará un resíduo, por ser las líneas incomensurables; pero este resíduo, menor que

una de las divisiones de AB, será tanto mas pequeño é inapreciable, cuanto mayor sea el númoro de partes en que la línea AB haya sido dividida. Si se divide la línea AB en un millon de partes iguales p. ej. y si CD contiene 456546 de estas divisiones, la razon de CD á AB será 0, 456546, aproximada hasta menos de unamillonésima, es decir que CD contendrá la millonésima parte de AB mas de 456546 veces, y menos 456547 veces.

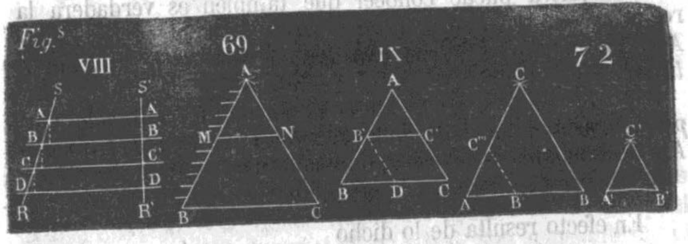
4. Cuando la razon de dos líneas A yB es igual á la razon de otras dos líneas C y D, de modo que podamos formar la proporcion A: B:: C: D, se dice que las cuatro líneas A, B, C, D, son *proporcionales*.

5. Entendemos por triángulos *semejantes*, aquellos que tienen sus lados proporcionales, de modo que podamos decir (fig. 70) A'B:A'B'::BC:B'C'::CA:C'A'.

Dos polígonos se dicen *semejantes* siempre que se puedan descomponer en igual número de triángulos respectivamente semejantes y colocados en el mismo órden; como los de la fig. 71.

En los polígonos semejantes se llaman *líneas homólogas* las líneas que unen los *puntos correspondientes* de estos polígonos. Para conocer en los triángulos semejantes cuales son los lados homólogos, tomaremos en consideracion sus ángulos respectivamente iguales, y los lados opuestos á estos ángulos serán las homólogos.

6. *Si tenemos dos rectas cualesquiera* SR, S'R', *cortada por un número cualquiera de paralelas* AA', BB', CC', DD', *siendo iguales entre sí los segmentos de la una, lo serán tambien entre sí los segmentos de la otra* (fig. VIII).



Para manifestar esta verdad, tiraremos las rectas FA;

BG. EH... paralelas á la S'R'. Los triángulos ABF. BEG... serán iguales, porque tienen un lado igual, AB=BE..., adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, BAF=EBG..., y ABF=BEG...: de donde AF=BG..., por consiguiente A'B'=B'E'.

7. *Si se nos dan dos rectas* AB,AC, *concurrentes en un punto* A, *cortadas por dos paralelas* MN, BC, *los segmentos* AM, MB *de la una son proporcionales á los segmentos* AN, NC *de la otra* (fig. 69).

Supongamos para esto que la razon entre AM y MB sea $\frac{5}{6}$, es decir que MB se haya dividido en 6 partes iguales, y que AM contenga 5 de estas partes: si por los puntos de division de la AB dirigimos paralelas á la BC, dividirán la AC en partes iguales, segun acabamos de demostrar. AN contendrá 5 de estas partes y NC 6; la razon pues entre estas dos rectas, será tambien $\frac{5}{6}$, resultando por consiguiente la proporcion:

AM:MB::AN:NC. L. Q. Q. D.

Asimismo, conteniendo la AM 5 de las 11 partes iguales en que AB está dividida, y AN otras 5 de las 11 partes iguales de AC, podemos formar la proporcion:

AM:AB::AN:AC, y por la misma razon

MB:AB::NC:AC, y dividiendo la primera por la segunda.

AM:MB::AN:NC.

Cualquiera puede conocer que tambien es verdadera la recíproca, es decir *que si la línea* MN *divide á las rectas* AB, AC *en partes proporcionales*, la MN *será paralela á la* BC.

8. *Toda recta* B'C' *tirada en el plano de un triángulo* ABC *paralelamente á uno de los lados* BC, *forma un segundo triángulo* AB'C' *semejante al primero*, de modo que resultará (fig. IX).

AB:AB'::AC:AC ::BC:B'C'.

En efecto resulta de lo dicho

AB:AB'::AC:AC'.

Si ahora dirigimos la B'D paralela á lá AC, tendremos.

AB:AB'::BC:CD, pero CD=B'C';

asi AB:AB'::BC:B'C'; luego etc.

9. *Dos triángulos semejantes* ABC, A'B'C' (fig, 72). *son equiangulares entre sí, y recíprocamente dos triángulos equiangulares entre sí, son semejantes.*

1.° Supongamos AB<A'B'. Tómese sobre AB una longitud AB"=A'B' y por el punto B", dirijase la B"C" paralela á BC; habremos formado de este modo un triángulo AB"C" semejante al ABC; pero segun nuestra suposicion el ABD es semejante al A'B'C': luego los dos triángulos AB"C" y A'B'C" son semejantes entre sí, é iguales al mismo tiempo, porque teniendo el lado A"=A'B', los otros lados tendrán entre sí la misma relacion de igualdad; asi pues, los triángulos AB"C" y A'B'C', ademas de ser semejantes, son tambien iguales. Los triángulos ABC, AB"C" son equiangulares entre sí; tambien lo serán pues ABC y A'B'C', y por consiguiente A=A', B=B', C=C'.

2.° Siendo ABC y A'B'C' equiangulares entre sí, AB"C" y A'B'C' lo serán tambien. Pero AB"=A'B" luego AB"C" y A'B'C que tienen igual un lado y todos sus ángulos serán iguales; asi pues ABC y A'B'C son semejantes.

COROLARIO 1.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

2.° *Dos triángulos isósceles son semejantes, cuando tienen iguales los ángulos de la base ó los del vértice.*

3.° *Dos triángulos rectángulos que tienen igual un ángulo agudo, son semejantes.*

10. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual*, A=A', *comprendido entre lados proporcionales*

AB:A'B'::AC:A'C' (fig 72).

Para demostrar este teorema, haremos la misma construccion que en el caso anterior. Los triángulos semejantes ABC, AB" C' nos dan la siguiente proporcion AB:AB"::AC:AC". Combinando esta proporcion con la supuesta en el teorema, resulta A'B':AB"::A'C':AC", y como A'B'=AB", tambien A'C'=AC". Asi pues, los triángulos A'B'C', AB"C" son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido luego ABC y A'B'C' son semejantes.

11. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos son semejantes.*

Los triángulos que se hallan en este caso, no pueden menos de tener sus ángulos respectivamente iguales como vamos á manifestar.

Los ángulos de estos triángulos ó son iguales ó suplementarios, segun demostramos en otra parte; veamos si los 6 ángulos de los dos triángulos, tomados dos á dos, pueden ser suplementarios. Si asi fuese, los ángulos de estos triángulos valdrian 6 rectos, lo cual es imposible. Tampoco pueden ser suplementarios 4 de estos ángulos tomados dos á dos, porque la suma de los 6 pasaria de 4 rectos.

Así pues, dos ángulos por lo menos de un triángulo son respectivamente iguales á dos del otro. Luego etc.

12. *Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales* de suerte que A=A', B=B', etc.; y al mismo tiempo A'B:AB'::BC,B'C... (fig. 71).

La demostracion de este teorema se reduce á descomponer de un modo cualquiera los dos polígonos en igual número de triángulos manifestando al mismo tiempo la semejanza de estos triángulos, tomados dos á dos del modo siguiente.

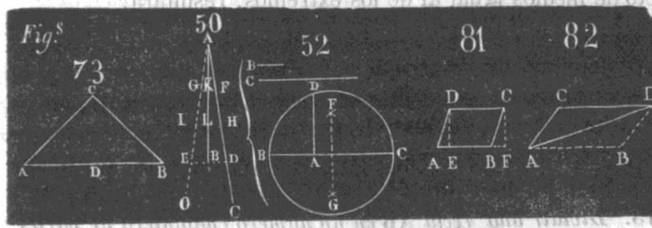
Los dos triángulos ABC, A'B'C' p. ej. que tienen un angulo B=C', y proporcionales los lados que lo forman, serán semejantes. De donde resulta que las diagonales AC, A'C, tienen entre sí la misma relacion que los lados homólogos de los polígonos; y que los ángulos ACD, A'C'D, son iguales, como diferencias de los ángulos iguales ACB, A'C'B. Luego los triángulos ACD, A'C'D' son tambien semejantes, por tener el ángulo C=C', formado por lados proporcionales.

Lo mismo podemos decir de todos los triángulos formados al rededor del punto A' Luego etc.

Corolario. *Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes*; y considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, estamos autorizados para decir que *todos los círculos so semejantes entre sí.*

13. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC (fig. 73), *bajamos una perpendicular* CD *sobre la hipotenusa* AB

1.° los dos triágulos ADC, CDB *son semejantes al triángulo* ABC; *2.° los otros triángulos* ADC, CDB *son semejantes entre sí; 3.° la perpendicular* CD *es media proporcional entre los dos segmentos* AD, BD *de la hipotenusa.*



1.° *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

1.° El ángulo A es comun á los dos triángulos ADC, ABC, ademas, cada uno de ellos tienen un ángulo recto; luego son semejantes: luego el ángulo ACD=CBD.

Lo mismo sucede con los triángulos CDB y ACB.

2.° Los dos triángulos ADC, CBD tienen cada uno un ángulo recto, y ademas, el ACD del uno igual al CBD del otro: luego son semejantes.

3.° Si comparamos los lados homólogos de los triángulos semejantes ACD, CDB, nos resultará la proporcion AD: CD:: CD: DB; á la linea CD que está contenida en la AD, tantas veces como ella contiene á la DB, la llamamos medio proporcional entre AD y DB: luego etc.

4.° La comparacion de los triángulos semejantes ACB, ADC, nos da la proporcion AD: CA:: CA:: AB.—Del mismo modo la comparacion de los triángulos semejantes CDB y ACB nos darán la proporcion DB: CB:: CB: AB: luego cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

Llámanse *cuestiones numéricas* todas las cuestiones de geometría que se pueden resolver por medio de las reglas de aritmética.

14. *En un triángulo rectangulo* ABC (73), *el cuadrado del valor numérico de la hipotenusa* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los valores numéricos de los catetos.*

En efecto, si con las dos últimas proporciones:

AD: CA:: CA: AB, y DB:CB::CB: AB, formamos el producto de medios igual al de los extremos, resultará:

$CA \times CA$ ó $CA^2 = AD \times AB$, y $CB \times CB$ ó $CB^2 = DB \times AB$.

Sumando estas dos igualdades, tendrémos:

$CA^2 + CB^2 = (AD + AB) \times AB$; pero $AD + DB = AB$: luego $CA^2 + CB^2 = A' \times A^{2\prime} = BO^2$. L. Q. Q. D.

Sea la hipotenusa AB=10 pies, AC=6 pies, y CB=8 pies, resultará 10×10 $10^2 = 6^2 + 8^2$, es decir, $100 = 36 + 64$.

15. *Dividir una recta* AB *en un número cualquiera de partes iguales.* (fig. 50).

Supongamos que se quiere dividir en tres partes.

Tiraremos por una de las extremidades una recta cualquiera AC, tomando en ella una longitud, tal que la suma AD de tres partes iguales á esta longitud, sea sensiblemente mayor que AB; unirémos el punto D al B; desde el punto A, con un rádio AD, trazarémos un arco que corte á la prolongacion de DB en el punto E, y uniendo el punto A con el punto E, tendríamos AE=AD; por consiguiente podremos colocar exactamente sobre AC las tres partes de AD. Uniendo ahora los puntos de division F y G, H é I por medio de rectas, estas rectas, que dividen las líneas AD, AE en partes iguales serán paralelas entre sí, y las divisiones AK, KL, LB, formadas por las paralelas, serán iguales.

16. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas b, c.* (fig. 52).

Sobre una recta BC colocaremos las dos dadas, b, c, la primera desde B hasta A, y la segunda desde A hasta C; sobre la recta BC, como diámetro, describirémos una semi-circunferencia; levantando sobre el punto A una perpendicular que corte en D á la semi-circunferencia esta perpendicular será media proporcional entre las rectas b y c.

17. *Construir en triángulo semejante a otro triangulo dado* ABC, *sobre una recta* A'B' *dada como homóloga al lado* AB.

Podemos resolver este problema de muchos modos, haciendo aplicacion de los casos de semejanza entre los triángulos. Una de las construcciones podrá ser la siguiente. Trácense sobre los extremos de la recta A'B', dos ángulos A'B', respectivamente iguales á los ángulos A y B del triángulo dado: la interseccion de las nuevas rectas que forman los ángulos determinará un triángulo semejante al lado.

Corolario. Para construir un polígono semejante á otro dado, bastará descomponerlo en triángulos, y trazar sucesivamente en número igual de triángulos semejantes y colocados en el mismo órden.

§. VII. *De las superficies de las figuras planas.*

1. Llámase *área* la superficie de una figura.
2. Medir una superficie es indagar cuantas veces cabe en ella otra que se toma por unidad.

Generalmente se elige por unidad el cuadrado construido sobre la unidad lineal que podrá ser la pulgada, el pie, la vara, etc.

Cualquiera que sea la unidad de superficie que elijamos, un rectángulo la contendrá tantas veces como nos indica el producto de su base por su altura, midiendo esta base y altura con la base y altura de la unidad elegida.

En efecto, supongamos que la unidad sea un pie cuadrado, y que con ella queremos medir el rectángulo A B C D (fig. 83); si el lado del cuadrado cabe 6 veces en la base C D, obtendremos 6 fajas rectangulares, tirando las parálelas á CD por los puntos de division; y si el mismo lado está contenido 8 veces en la altura AD, quedará dividida cada una de estas fajas en 8 cuadros iguales, por medio de las paralelas á AB dirigidas por las divisiones de AD. Pero es indispensable que para obtener el número total 48 de cuadrados que hay en el rectángulo, se ha de multiplicar 8, longitud de la altura AD por 6, longitud de la base CD.

Si se quiere, pues, medir en pies cuadrados la superficie de un rectángulo ABCD, bastará medir su base y su altura con el pie lineal, y formar el producto de los números que resulten de esta medicion.

Lo mismo sucederá si tomamos por unidad la pulgada, la vara, etc.; de donde podemos deducir la expresion general. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

4. *Todo paralelógramo* ABCD *es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura* (fig. 81).

Esta verdad se hará muy perceptible, si bajamos sobre la base AB y sobre su prolongacion las perpendiculares DE, CF; de cuya construccion nos han resultado los dos triángulos iguales DAE, CBF; por tener sus ángulos y sus lados respectivamente iguales. Si á cada uno de los dos triángulos añadimos el trapecio DEBC, tendremos; el triángulo DAE mas el trapecio DEBC=al triángulo CBF mas el mismo trapecio DEBC; pero el primer triángulo y el trapecio componen el paralelógramo ABCD; el segundo triángulo y el mismo trapecio forman el rectángulo DEFC de la misma base y altura que el paralelógramo; luego etc.

Como en el cuadrado la base y la altura son iguales, estamos autorizados para decir que el área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.

5. *Todo triángulo* ADC (fig. 82) *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*

Por los puntos A y D dirigiremos las líneas AB, DB respectivamente paralelas á CD, AC; habremos formado de este modo el paralelógramo ABCD, dividido por la diagonal AD en dos triángulos iguales ADC, ADB; luego el triángulo ADC es la mitad del paralelógramo ABCD que tiene la misma base y altura.

De donde se infiere *que el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por la altura.*

6. *El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura* (fig. 80).

Descompondremos para esto el trapecio en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene por base uno de los lados paralelos, y por altura, la misma del trapecio. De aquí resultará:

$$ACB=AB\times\frac{1}{2}EA,\ y\ ACD=DC\times\frac{1}{2}EA,\ y\ sumando:$$

$$ACB+ACD=(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA,$$ ó lo que es lo mismo trapecio

$$ABDC=(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA.$$

7. Para medir un polígono cualquiera, podemos descomponerlo en triángulos y hallar la superficie de cada uno de estos triángulos: la suma total será igual á la superficie del polígono.

8. *El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.*

Para demostrar este teorema, descompondremos el polígono regular en triángulos que tengan un vértice comun en el centro. Todos estos triángulos tienen por altura el apotema del polígono, y por base uno de los lados. El producto, pues, de la suma de los lados por la mitad del apotema, ó lo que es lo mismo, el perímetro multiplicado por la mitad del apotema, nos dará el área del polígono regular.

Considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, cuyo apotema se ha convertido en el rádio, y el perímetro en la circunferencia, podemos decir que:

La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Luego si llamamos r al rádio, C á la circunferencia, y S á la superficie del círculo, se podrá expresar esta del modo siguiente:

$$S=C\times\frac{1}{2}r.$$

Y si en lugar de C sustituimos su valor con respecto al rádio, resultará la expresion:

$$S=2r\times3,14159\times\frac{1}{2}r=\frac{2r^2\times3,14159}{2}=r^2\times3,14159.$$

Luego la superficie del círculo es igual al cuadrado del rádio multiplicado por el número 3,14159.

10. El *problema de la cuadratura del círculo* tiene por

objeto hallar un cuadrado que tenga la misma superficie que el círculo. Han sido inútiles hasta el presente todos los esfuerzos que se han hecho para resolver este problema.

SEGUNDA PARTE.—DE LOS PLANOS Y DE LAS LINEAS RECTAS EN EL ESPACIO.

§. I. *De los planos en general.*

1. Asi como un punto no determina la posicion de una recta, del mismo modo dos puntos tampoco son suficientes para determinar la posicion de un plano; y asi como por un punto pueden pasar infinitas rectas, del mismo modo por una recta pueden atravesar infinitos planos. En efecto, si suponemos que un plano gira al rededor de una línea como eje, las infinitas posiciones que el plano tenga en esta vuelta, serán otros tantos planos que pasarán por aquella recta.

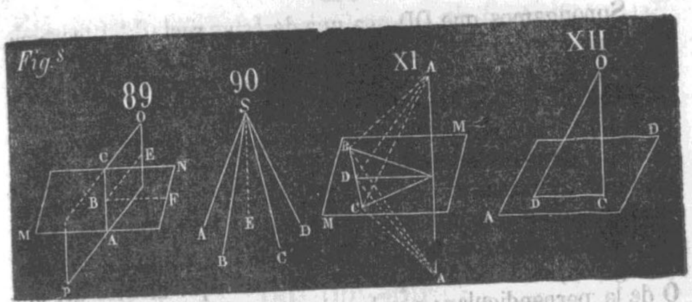
Pero asi como dos puntos determinan la posicion de una recta, del mismo modo tres puntos que no estén en línea recta, determinan la posicion de un plano; de manera *que por tres puntos no situados en línea recta solamente puede pasar un plano*.

De donde se infiere: 1.° *que dos líneas, que se cortan, determinan exactamente la posicion de un plano; 2.° que dos paralelas están siempre en un mismo plano*, como resulta de su misma definicion.

2. Una recta y un plano se dice que son *paralelos entre si* cuando, prolongados indefinidamente, no se pueden encontrar; del mismo modo, dos planos son *paralelos* cuando en su prolongacion indefinida no se encuentran.

3. Llámase *perpendicular* á un plano aquella recta que lo sea á todas las que en el plano pasan por su pie; por el contrario, dícese *oblícua* aquella que no sea perpendicular á todas las que situadas en el plano pasen por su pié.

4. Llámase *ángulo diedro* el espacio ilimitido, comprendido entre dos planos MNOP (fig. 89) que se cortan. La interseccion de los dos planos se llama *arista*; y los planos, *caras* del ángulo diedro.



Asi como el ángulo plano lo designábamos con la letra del vértice cuando este no era comun á otros ángulos, del mismo modo anotarémos en igual caso el ángulo diedro con dos letras correspondientes á la arista; pero cuando esta arista sea comun á otros diedros, añadirémos dos letras que designarán respectivamente las dos caras del ángulo, interponiendo siempre, cuando queramos expresarlo verbalmente, las letras de la arista.

5. Entendemos por ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido*, la porcion indefinida de espacio comprendido entre tres ó mas planos que se cortan en un mismo punto S (fig. 90).

Llámase *vertice* del ángulo poliedro, el punto comun S de interseccion; *cara*, cada uno de los ángulos planos ASB, BSD, ASD, etc., que forman el ángulo poliedro.

El ángulo poliedro se designa por medio de la letra de su vértice.

6. Si querémos indicar el número de caras del ángulo poliedro, sustituirémos á esta denominacion general, la de ángulo *triedro*, *tetaedro*, *pentaedro*, etc., segun que el número de sus caras sea *tres*, *cuatro* ó *cinco* etc.

El *ángulo triedro* es el mas sencillo de los ángulos poliedros.

7. *Si una recta OA es perpendicular á otras dos OB, OC tiradas por el punto O, pié de esta perpendicular, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se pueden trazar en el plano MN de las dos primeras* (fig. XI.)

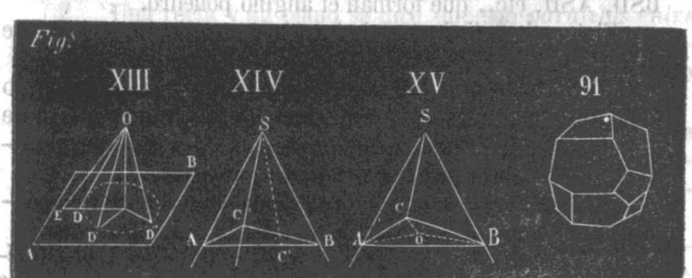
Supongamos que OD sea una de estas rectas; el teorema quedará demostrado, si manifestamos que OA es perpendicular á OD. Para esto prolongarémos la OA por la otra parte del plano en una cantidad OA′=OA; sobre las dos rectas OB OC, tomarémos dos puntos cualesquiera, B, C; tirarémos la BC, y sea D el punto de interseccion de BC con OD; finalmente tirarémos las rectas AB, AC, AD, A′B, A′C A′D. Esta construccion nos manifiesta la igualdad de los triángulos ABC y A′BC, segun vamos á ver. El lado BC es comun á los dos triángulos; el AB=A′B por ser oblícuas equivalentes del pie O de la perpendicular; por la misma razon AC=A′C. Luego estos dos triángulos son iguales entre sí, de manera que en la sobreposicion las rectas AD y A′D coincidirán exactamente; por consiguiente OD será perpendicular á OA y recíprocamente.

Corolario. *Si una recta es perpendicular á otras dos rectas tiradas por su pie en un plano, lo será tambien á este plano.*

8. *La perpendicular* OC (*fig.* XII) *al plano* AB *desde un punto exterior* O, *es el camino mas corto de este punto al plano.*

Supongamos una oblícua cualquiera OD bajada desde el punto O al plano AB. Tirando la recta CD, formarémos un triángulo rectángulo OCD, cuya hipotenusa será la oblícua OD; de donde se infiere que OC<OD.

Corolario. *La perpendicular bajada de un punto á un plano, mide la verdadera distancia del punto al plano.*



9. Si desde el punto O, (fig. XIII) que suponemos fuera

del plano AB, bajamos la perpendicular OC, y diferentes oblícuas OD, OD′, OD″..... OE

1.° *Las oblícuas* OD, OD′ *equidistantes del pie de la perpendicular son iguales.*

2.° *De dos oblícuas* OD, OE *que no distan igualmente del pie de la perpendicular la que mas se apartará, á saber, la* OE, *es mayor que la segunda.*

1.° Resulta de la suposicion que hemos hecho que CD=CD′=CD; y de la igualdad de aqui los triángulos ODC, OCD′, OCD″; cuya igualdad nos dice que

$$OD=OD'=OD'';$$

y *generalmente*: Si desde el punto C, como centro y con un rádio igual á CD, trazamos una circunferencia en el plano AB, todas las oblícuas que unen el punto O con los diferentes puntos de la circunferencia, serán iguales.

2.° Si suponemos en línea recta los tres puntos C, D, E, resultará

$$CE>CD,$$

y por consecuencia $OE>OD$.

Si los tres puntos C, D, E, no se hallasen en línea recta, obtendríamos el mismo resultado, reemplazando la oblícua OD con otra OD′ que tenga la misma distancia del pie de la perpendicular.

Corolario. *Desde un mismo punto podemos tirar á un plano una infinidad de rectas iguales,* (con tal que sean mayores que la perpendicular).

Ademas equidistando estas rectas del pie de la perpendicular, se infiere que

Un punto cualquiera O *de la perpendicular* OC *al plano, puede servir para trazar en este plano una circunferencia, cuyo centro será el pie de la perpendicular.*

§. II. *De la interseccion de los planos, del ángulo diedro y del triedro.*

1. Entendemos por *interseccion de dos planos* la série de puntos que están situados á la vez sobre dos planos.

2. *La interseccion de dos planos MN, OP (fig. 89) es una línea recta.*

Los puntos A, B, C, etc. comunes á los dos planos MN, OP, pertenecen necesariamente á una misma recta; porque si el punto C no estuviese situado en la recta que une el punto A con el B, resultaria que los dos planos MN, OP, que tienen comunes tres puntos no situados en la línea recta, formarian un solo plano.

3. Si sobre la arista AC del ángulo diedro (fig. 89) tomamos un punto B, y sobre él levantamos una perpendicular en cada una de sus caras, resultará el *ángulo plano* EBF: este ángulo se llama *ángulo correspondiente* al diedro PACN: así pues entendemos por *ángulo correspondiente á un ángulo diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, levantadas respectivamente en cada una de sus caras desde uno de sus puntos.*

4. Para medir el ángulo diedro, nos valemos de su ángulo correspondiente, autorizándonos para esta sustitucion la proporcion que siempre existe entre los ángulos driedros y sus ángulos correspondientes.

5. *En todo ángulo triedro, S, una de sus caras es menor que la suma de las otras dos*, (fig. XIV).

Para manifestar la verdad de este teorema supondrémos que la cara ASB>ASC, y que la misma cara ASB>BSC; en una palabra, que ASB sea mayor que cualquiera de las otras dos, tomadas separadamente. Nos proponemos demostrar que ASB<ASC+BSC. Para esto tirarémos una recta AB desde un punto cualquiera A de la arista SA á otro punto B de la arista SB. Despues, desde el punto S, y en el plano ASB, trazarémos la recta SC′ que forme un ángulo BSC′=BSC y que corte á la AB en un punto C′: sobre la arista SC tomarémos una lonjitud SC=SC′. Finalmente tiraremos las rectas AC y BC.

Segun esta construccion, los triángulos BSC y BSC′ serán iguales por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido; luego BC=BC′. Pero en el triángulo ABC tenemos que

$$AB<AC+CB, \text{ ó } AC'+CB'<AC+CB;$$

luego $AC'<AC$;

y por consiguiente

$$ASC'<ASC.$$

Añadiendo á los dos miembros de esta inecuacion, al uno la cantidad BSC, y al otro la BSC′, tendremos:

$ASC'+BSC'<ASC+BSC$, ó $ASB<ASC+BSC$. L. Q. Q. D.

6. *En todo ángulo triedro, S, la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos.* (fig. XV).

Para demostrar este teorema tiraremos un plano que corte las caras segun las líneas AB, AC, BC; despues desde un punto cualquiera O, tomado en el triángulo ABC, dirijirémos las rectas OA, OB, OC. Habrémos formado tres triángulos que tendrán respectivamente por bases las rectas AB, AC, BC, y el punto S por vértice comun. Con la construccion precedente habrán resultado otros tres triángulos, que tendrán respectivamente las mismas bases, y su vértice en el punto O. El ángulo CAB, compuesto de la suma de los ángulos OAC y OAB, es menor que la suma de los ángulos SAC y SAB, segun el teorema precedente; por la misma razon ABC<SBA+SBC, y BCA<SCB+SCA: así pues, la suma de los ángulos de la base, en los triángulos que tienen su vértice en O, es menor que la suma de los ángulos de la base en los triángulos que tienen su vértice en S. Pero la suma de los ángulos de los tres triángulos es la misma en los dos casos; luego la suma de los ángulos en S es menor que la de los ángulos en O; y como esta vale cuatro rectos, se infiere que la primera es menor que cuatro ángulos rectos L. Q. Q. D.

Esta proporcion es igualmente aplicable á cualquier ángulo poliedro.

Corolario. 1.° *No se pueden formar con los ángulos de un triángulo equilátero sino ángulos sólidos de tres, cuatro, y cinco caras.*

Segun el teorema precedente, si queremos formar ángulos poliedros de ángulos planos iguales, debemos atender al número de estos y al valor de cada uno de ellos. Cada ángulo del triángulo equilátero vale $^2/_3$ R: (designando con la letra R el ángulo recto); y el ángulo sólido de 3, 4, 5 caras que haya de tener cada ángulo del vértice igual al del triángulo equilátero, ha de satisfacer al principio anterior que se acaba de establecer; lo cual solamente se verifica en las tres primeras inecuaciones que siguen;

$3\times{}^{2}/_{3}\,R<4R$; $4\times{}^{2}/_{3}R<4R$; $5\times{}^{2}/_{3}\,R<4R$; $6\times{}^{2}/_{3}R=4\,R$; $7\times{}^{2}/_{3}R>4\,R$; por consiguiente pasa de 4 R la suma de mayor número de ángulos planos, iguales al del triángulo equilátero.

2.° *Con los ángulos del cuadrado solo se puede formar el ángulo sólido de tres caras.*

Porque el valor del ángulo del cuadrado es R; y $3\times R<4\,R$; $4\times R=4\,R$; $5\times R>4\,R$; excediendo de 4 R las sumas de un número mayor de ángulos del cuadrado.

3.° *Con los ángulos del pentágono regular solamente se puede formar el ángulo poliedro de tres caras.*

El ángulo del pentágono regular vale ${}^{6}/_{5}$ R; por consiguiente $3\times{}^{6}/_{5}R<4\,R$; $4\times{}^{6}/_{5}\,R>4\,R$.

4.° *Con los ángulos del exágono regular no puede formarse ángulo sólido, y lo mismo sucede con los ángulos de los polígonos que tengan mas lados.*

En efecto, el ángulo del exágono es ${}^{4}/_{3}$ R; y resulta que $3\times{}^{4}/_{3}R=4\,R$; $4\times{}^{4}/_{3}R>4\,R$; de suerte que ni aun se puede formar el triedro, que es el ángulo sólido mas sencillo. El ángulo del heptágono es mayor; de consiguiente tampoco con él podemos formar ningun ángulo sólido: y con mas razon se puede asegurar lo mismo de los ángulos de polígonos regulares, que tengan mayor número de lados.

§. III. *De los poliedros en general.*

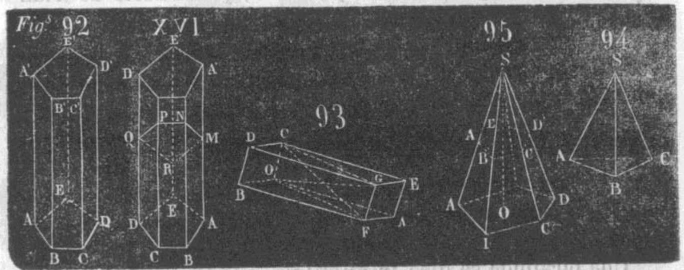
1. Entiéndese por *poliedro* un espacio enteramente circunscrito, ó en otros términos, un sólido terminado por muchos planos que se cortan dos á dos (fig. 91).

El poliedro, pues, está limitado por una série de polígonos que reciben el nombre de *caras*, y cuyo conjunto constituye la superficie del poliedro; los lados de estas caras son las *aristas* del poliedro; y los puntos de interseccion de las aristas se llaman *vértices*.

2. Entre los poliedros merecen particular atencion el *prisma* y la *pirámide*.

Entendemos por *prisma* un poliedro que tiene por caras dos polígonos iguales y paralelos, y una série de paraleló-

gramos igual en número á los lados de cada polígono (fig. 92); los paralelógramos AB', CD', DE', EA', constituyen las *caras laterales* del prisma, y todas ellas la superficie lateral.



Llámanse *bases* del prisma los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E'; y *altura* la distancia de las bases ó la perpendicular comun á sus planos.

Un prisma será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base sea un triángulo, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, etc. Si estas bases son polígonos regulares, el prisma se dice *regular*.

Un prisma se llama *recto*, cuando sus aristas laterales son perpendiculares al plano de las bases; en cuyo caso cada arista será igual á la altura del prisma, y las caras serán rectángulos: en el caso contrario el prisma se dice *oblícuo*.

Llámase *tronco de prisma* ó *prisma truncado* cada uno de los trozos que resultan por medio de un plano MNPQR, que no sea paralelo á las bases (fig. XVI).

3. Entendemos por *paralelepípedo* un prisma que tiene por bases dos paralelógramos.

Resulta de esta definicion que el paralelepípedo tiene por caras 6 paralelógramos (fig. 93).

Llámase *recto* el paralelepípedo cuyas caras son perpendiculares á la base, y *rectangular*, el que tiene todas sus caras rectangulares.

Entendemos por *cubo ó exaedro regular* un prisma cuyas caras todas son cuadradas; el cubo, pues, será un sólido terminado por seis cuadrados iguales: tales son los dados de jugar.

4. La *pirámide* es un poliedro que tiene por caras un polígono de cualquier número de lados, y una série de triángulos, cuyo vértice es comun á todos (fig. 95).

Si queremos obtener la pirámide, uniremos por medio de rectas los vértices de un polígono ABCDE á un punto cualquiera S, colocado fuera de su plano.

Los triángulos formados de este modo constituyen las *caras laterales* de la pirámide; el polígono será su *base*; el vértice comun de los triángulos se llama *cúspide* de la pirámide; y *altura*, la perpendicular SO bajada al plano de la base (fig. 95).

Una pirámide se dice *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base es un *triángulo*, *cuadrilátero*, *pentágono*, etc.: se llama *regular* cuando su base es un polígono regular.

5. Si por medio de un plano entre el vértice y la base cortamos todas las aristas laterales de una pirámide SABCDE (figura 95), la figura quedará dividida en dos trozos; uno, S'A'B'C'D'E', es una segunda pirámide, y el otro, ABCDE, A'B'C'D'E', se llama *tronco de pirámide* ó *pirámide truncada*.

6. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales entre sí.

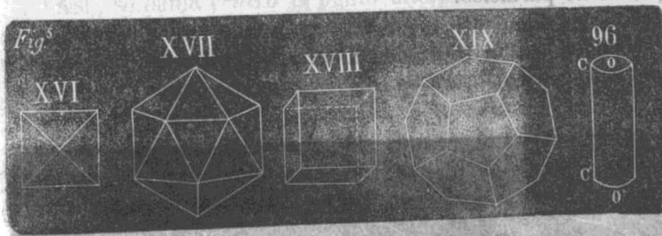
Es muy reducido el número de poliedros regulares, porque, segun hemos visto, con el ángulo del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos poliedros de tres, de cuatro, y de cinco caras; con el del cuadrado, únicamente un ángulo de tres caras; é igualmente con el ángulo del pentágono.

Por esta razon solamente se pueden concebir cinco cuerpos regulares, que son: el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, cuyas caras en todos son triangulares; el *exaedro* ó *cubo*, limitado por seis cuadrados; y el *dodecaedro*, cuyas caras son pentagonales.

El *tetraedro regular* es un poliedro que tiene cuatro ca-

ras triangulares SAB, SAC, SBC, ABC, regulares é iguales entre sí. (fig. 94).

Entiéndese por *octaedro* un sólido terminado por 8 triángulos regulares é iguales (fig. XVI).



Llámase *icosaedro* el poliedro terminado por veinte triángulos iguales y equiláteros (fig. XVII).

Entendemos por *cubo* ó *exaedro regular* un sólido limitado por seis cuadrados iguales. (figura XVIII).

Entiéndese por *dodecaedro* un poliedro formado por doce pentágonos regulares é iguales entre sí. (fig. XIX.

§. IV. *De los cuerpos redondos.*

1. Llámanse generalmente *cuerpos redondos* los sólidos terminados por superficies curvas.

En la geometría elemental solo tres figuras redondas se toman en consideracion: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

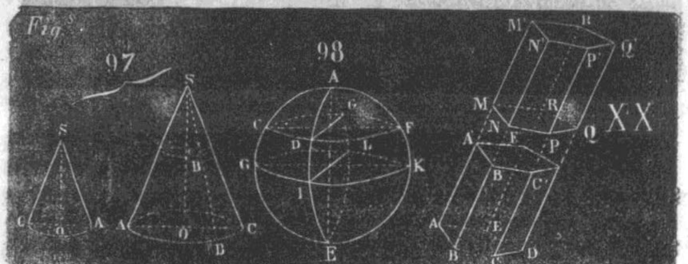
2. Entendemos por *cilindro* un sólido producido por la revolucion de un rectángulo CO, CO' (fig. 96) al rededor de uno de sus lados OO'.

Supongamos inmovil el lado OO', y hagamos girar el lado CC'; este lado CC' describirá en su revolucion una superficie curva que se llama cilíndrica; y el espacio cerrado por dicha superficie y los planos en que se mueven las líneas OC, O'C', recibe el nombre de *volúmen cilíndrico*.

Los planos circulares trazados por los lados CO, C'O' se llaman *bases* del cilindro; finalmente el lado inmovil OO' es la *altura* ó el *eje* del cilindro. Si a recta OO′ pasa por los centros de los círculos, el cilindro será *recto;* en otro caso será *oblicuo.*

3. Llámase *tronco de cilindro*, ó *cilindro truncado*, el espacio limitado por una superficie cilíndrica y por los dos planos no paralelos.

4. Entendemos por *cono*, un sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo COS al rededor uno de sus catetos SO (figura 97).



El lado inmovil SO es el *eje* ó la *altura* del cono; el plano circular, producido en la revolucion por el otro lado CO se llama *base* del cono; la superficie engendrada por la hipotenusa SC, se denomina *superficie cónica*; y el espacio cerrado por esta superficie y por la base se llama *volúmen cónico.*

5. Entiéndese por *tronco de cono*, ó *cono truncado*, el espacio comprendido entre la superficie cónica, la base y otro plano que corte á todo el cono. Llámanse *bases* del tronco los planos que lo limitan. Si estos planos son paralelos, el tronco se llama de *bases paralelas.*

Un tronco de cono de bases paralelas CA′ (fig. 97) lo podemos considerar como engendrado por la revolucion de un trapecio OA′ rectángulo en O y en O′, que gira al rededor del lado OO′, como eje.

6. La *esfera* es un sólido formado por la revolucion de una semicircunferencia GAK (fig. 98) al rededor del diámetro GK. Cada punto de la semicircunferencia describirá en es-

ta vuelta un círculo, cuyo radio será la distancia del punto al diámetro inmovil GK. Este diámetro se llama *eje* de la esfera, y sus dos extremos G, K, reciben el nombre de *polos.*

La esfera es en el espacio, relativamente á las superficies curvas, lo que el círculo con respecto á las curvas planas.

Así, se llama *centro* el punto interior O, del cual equidistan todos los puntos de la superficie esférica; *radio*, la distancia constante del centro á la superficie; y *diametro*, toda recta que, pasando por el centro, termina por sus extremos en la superficie. Las dos porciones en que un plano divide la superficie esférica se llaman *casquetes esfericos*: los dos trozos de la esfera, *segmentos esféricos*; y la parte de su superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, *zona esférica.*

7. Todo plano que pasa por el centro de la esfera, la divide en dos partes iguales, que se llaman *emisferios*. Esta interseccion produce un *círculo máximo* que tendrá el mismo centro y el mismo rádio de la esfera; los círculos GIKL, AIEL, serán, segun esto, dos círculos máximos.

Si el plano no pasa por el centro, la seccion será un *círculo menor*, que tendrá un radio mas pequeño que el de la esfera: tal es el círculo CDFG (fig. 98).

8. Son muy numerosas las aplicaciones de la esfera en las artes del tornero, del ebanista, etc. Las bolas del villar son unas esferas de marfil; la luz de los quinqués se hace inofensiva á nuestra vista por medio de esferas de cristal deslustrado, etc.

§. V. *De las superficies de los poliedros.*

1. Siendo el *área* de un poliedro igual á la suma de las áreas de las diferentes caras que lo terminan, bastará para determinar aquella hallar sucesivamente la superficie de cada una de las caras. Por esta razon nos contentarémos con demostrar algunos teoremas necesarios para la ilustracion de esta materia.

2. *La superficie lateral de un prisma recto tiene por medida el producto del perímetro de su base por una de sus aristas.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de rectángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun una de las aristas y cuyas bases componen el perímetro de la base del prisma.

COROLARIOS. 1.° *La superficie total de un prisma regular tiene por medida el producto del perímetro de su base por la suma de una arista y de la apotema de esta base.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, estamos facultados para decir que:

La superficie lateral de un cilindro recto es equivalente á la de un rectángulo que tenga por base la circunferencia de la base del cilindro, y su arista por altura.

Por consiguiente.—*La superficie lateral del cilindro recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por una arista.*

3.° *La superficie total de un cilindro circular recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la suma de su arista y el rádio de esta base.*

3. *La superficie lateral de un prisma oblicuo ABCDE A'B'C'D'E' es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion MNPQR, perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del perímetro* (fig. XX).

Para manifestar esta verdad, prolongarémos indefinidamente en un mismo sentido las aristas laterales AA', BB', CC', DD'; cortarémos estas prolongaciones con un plano perpendicular MNPQR; despues tomarémos en la misma direccion las líneas MM', NN', PP', QQ', RR' iguales entre sí y á las aristas del prisma oblícuo: la figura

MNPQRM'N', P'Q'R'

determinada de este modo será un prisma recto de las mismas aristas laterales que el prisma propuesto, y que tendrá por base la seccion perpendicular á las aristas.

Pero los paralelógramos AB', BC', CD'... tienen respectivamente las mismas bases y alturas que los rectángulos MN', NP', PQ',....: luego aquellos paralelógramos, tomados uno á uno, son equivalentes á los rectángulos: *luego* etc.

COROLARIO. *El área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas, multiplicado por la longitud de una de estas.*

4 *La superficie lateral de una pirámide regular tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de triángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun el *apotema* de la pirámide, ó sea la distancia de la cúspide á los lados de la base, componiendo la suma de sus bases el perímetro de la base de la pirámide.

COLORARIOS. 1.° *El área total de una pirámide regular tiene por medida la mitad del perímetro de su base por la suma de las apotemas respectivas de la pirámide y de la base.*

2.° Considerando el cono circular como una pirámide regular de infinitas caras, podemos decir que:

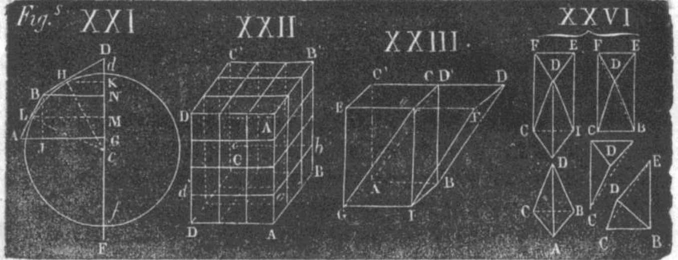
La superficie lateral del cono circular tiene por medida la mitad del producto de su arista por la circunferencia de su base; ó el producto de su arista por una seccion equidistante de la base y de la cúspide.

3.° *La superficie total de un cono circular recto tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia de su base por la suma de una arista y del radio de la base.*

4.° *El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas tiene por medida el producto de la semi-suma de los perímetros de sus bases por su apotema;* ó lo que es lo mismo, *el producto del perímetro de una seccion hecha á igual distancia de las bases, multiplicado por la apotema.*

5.° *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas tiene por medida el producto de su arista por la semi-suma de las circunferencias de las bases; ó el producto de su arista por la circunferencia dada perpendicularmente al eje á igual distancia de las bases.*

5 *La superficie de la esfera es igual al producto de la circunferencia del círculo máximo por su diámetro y cuádruple de la de su círculo máximo.* (fig. XXI).



Si suponemos que el semipolígono regular DBA...Fc, circunscrito al semicírculo dHL....f, gira al rededor del diámetro d f, no hay duda que en esta revolucion engendrará tantas figuras cónicas como lados tiene, y la superficie total será la suma de estas figuras. El lado BD producirá un cono cuya superficie, suponiendo HK una perpendicular bajada al diámetro desde H, punto medio de BD, será; $s = BD \times cir.\ HK$. Dirigiendo ahora el rádio HC, perpendicular necesariamente al lado tangente BD, resultarán los triángulos HCK y BND, semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares; cuya semejanza nos dará la siguiente proporcion:

$$HC:HK::BD:DN:$$

Por otra parte, las circunferencias trazadas con los rádios HC y HK son proporcionales á estos rádios; y sustituyendo, la proporcion anterior se convertirá en la siguiente:

$$Circ.\ HC: Circ.\ HK :: BD: DN;$$ de donde $Circ.\ HC \times DN = Circ. HK \times BD$; y colocando la primera cantidad en lugar de la segunda en la expresion de la superficie cónica engendrada por BD será $s = Circ. HC \times DN$.

La superficie del tronco cónico engendrado por BA será tambien $s' = circ.\ LM \times AB$, suponiendo la LM perpendicular bajada al diámetro desde L, punto medio de AB. Tirando el rádio LC, por la misma razon anterior, los triángulos semejantes LCM y ABJ dan esta proporcion:

$$circ.\ LC : circ.\ LM :: AB ; BJ;$$ de donde $circ.\ LC \times BJ = circ.\ LM \times AB$. Sustituyendo en la ecuacion

anterior, resulta la expresion de la superficie producida por AB que será

$$s' = Circ.\ LC \times BJ;$$ ó lo que es lo mismo:
$$s' = Circ.\ LC \times NG.$$

Del mismo modo se demuestra, que cada figura redonda, engendrada por la revolucion de cada lado, tiene por medida el producto de la circunferencia trazada con el rádio de la esfera, por la parte de diámetro igual á la altura del cuerpo engendrado. La suma de todas estas superficies parciales compone la superficie total de la figura engendrada por la revolucion del semipolígono circunscrito; y como este semipolígono se puede aproximar cuanto se quiera al semicírculo, podremos tomar el cuerpo engendrado por aquel, como si fuera producido por la revolucion de una semicircunferencia: es decir, podemos considerar como una esfera, sin peligro de grande equivocacion, el cuerpo originado por el semipolígono.

Si reunimos, pues, las superficies parciales de los diferentes conos producidos en la revolucion, la suma total representará la superficie de la esfera: y asi sumando ordenadamente las ecuaciones anteriores

$$s = Circ.\ HC \times DN$$
$$s' = Circ.\ LC \times NG$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

tendremos $s + s' = Circ.\ HC \times DN + Circ.\ LC \times NG$
ó lo que es lo mismo $s + s' = Circ.\ HC\ (DN + NG)$.

Y llamando S á las sumas de las superficies parciales $s + s' ....$, C á la circunferencia del círculo máximo, 2r al diámetro de la esfera, ó á la suma $DN + NG....$, nos resultará:

$$S = C \times 2r$$

y sustituyendo en esta ecuacion el valor de $C = 2r\pi$, se habrá convertido en esta espresion

$$S = 4r^2\pi$$

Esta fórmula nos dice que, para determinar la superficie de la esfera, debemos cuadruplicar el producto del cuadro de su rádio por π y al mismo tiempo nos manifiesta, que el área de la esfera es cuádrupla de la del círculo máximo, supuesto que esta es igual á $r^2\pi$.

§. VI. *De los volúmenes.*

1. Asi como para medir las superficies planas tomamos el cuadrado por unidad, del mismo modo para medir los volúmenes nos servirá de unidad el cubo construido sobre una arista, igual á la unidad lineal.

2. *El volúmen de su paralelepípedo rectangular es igual al producto de la superficie de su base multiplicada por la altura* (fig. XXII).

En efecto, supongamos que la altura AA contiene cuatro veces á la altura de la unidad de medida. Si cortamos el paralelepípedo por todos los puntos de division y paralelamente á la base, quedará dividido en cuatro prismas de la misma base y altura; por consiguiente del mismo volúmen. Todos estos prismas, pues, contendrán la unidad de medida el mismo número de veces, y para determinar la medida del prisma total será suficiente multiplicar este número por el número 4 de los prismas pequeños que han resultado. Pero el primero Ac contiene á la unidad de medida tantas veces como su base, que es la base A B C D del prisma grande, puede contener á la base cuadrada de esta unidad, es decir, tantas veces como designa la superficie del prisma AC. Asi, pues, el volúmen de un paralelepípedo rectangular se obtiene multiplicando la superficie de la base por la altura. En el caso presente es 9; y el volúmen será por consiguiente $9\times4=36$ pies cúbicos.

COROLARIOS: 1.° *El volúmen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de tres aristas adyacentes, ó que forman un ángulo triedro.*

2.° Siendo iguales en el cubo todos los aristas,

El volúmen del cubo es igual á la tercera potencia de una de sus aristas.

Por esta razon se llama *cubo* la tercera potencia de cualquier cantidad.

3. *Todo paralelepípedo AF, recto ú oblícuo, tiene el mismo volúmen que un paralelepípedo rectangular de base equivalente y de la misma altura.*

Sean AD y GF las caras opuestas que tomamos por bases y las aristas AG, BI, CE, DF, perpendiculares á las bases, en el paralelepípedo recto AF (fig. XXIII). Tiraremos por las

rectas AG, BI, dos planos perpendiculares á los planos paralelos AI, CH. Los planos tirados de este modo cortarán respectivamente las caras laterales AD, GF segun las rectas AC' y BD', GE' é IF', y suponiendo estas rectas terminadas en el plano de la cara opuesta CF, resultará un nuevo paralelepípedo AF'. Pero este paralelepípedo es rectangular, porque AC' y sus paralelas son perpendiculares á los planos AI, CF, y por consiguiente á las rectas AB, CD'; de donde resulta que las caras AD', GF', que podemos tomar por bases, serán rectángulos; y ademas las aristas laterales AG, BI, son perpendiculares á los planos de estas bases.

Ahora bien, los dos paralelepípedos AF, AF' que tienen sus bases equivalentes AD, AD' y una misma altura AG, serán iguales en volúmen.

En efecto, los dos prismas determinados, el uno por las aristas laterales AG, CE, C'E', y el otro por la BI, DF, D' F', son iguales: luego restándolos separadamente de la figura total AGBI DFC'E', obtendremos dos diferencias iguales.

Pero una de estas rectas es el paralelepípedo AF, y la otra el paralelepípedo AF'. Luego etc.

COROLARIO. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

4. *El volúmen de un prisma cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

Acabamos de demostrar este teorema general relativamente á los paralelepípedos, y las reflexiones siguientes nos harán conocer que es igualmente aplicable á todos los prismas.

En efecto, si en un paralelepípedo cualquiera tiramos un plano diagonal que pase por dos aristas laterales, nos resultarán dos prismas triangulares, que, por tener una misma base y altura, serán iguales en volúmen. Asi pues, cada uno de ellos será la mitad del primitivo; pero el primitivo tiene por expresion de su volúmen el producto de su base por la altura, luego el volúmen de cada uno de ellos será igual al producto de la mitad de la base del paralelepípedo por la misma altura; pero la mitad de la base del paralelepípedo primitivo es puntualmente la base de cada uno de los dos que han resultado:

luego el volúmen del prisma triangular será equivalente á producto de su base por la altura.

Como todos los prismas se pueden dividir en triangulares por medio de planos diagonales, se infiere que el volúmen total del prisma tomado en consideracion será igual á la suma de los volúmenes parciales de los prismas triangulares. Teniendo cada uno de estos por expresion de su volúmen el producto de su base por la altura comun, resulta que la suma de estas bases, ó sea la base total del prisma multiplicada por su altura, expresará su volúmen total.

Corolarios. 1.° *Dos prismas que tienen bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes en volúmen.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, podemos decir que :

El volúmen del cilindro tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.

5. *Toda pirámide es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura* (fig. XXIV).

Supongamos que la pirámide en cuestion sea un tetraedro ABCD; y el prisma de la misma base y altura el triangular ABCDEF. Tiraremos las rectas DB, DC, y por ellas haremos pasar un plano CDEB, cuya seccion nos dará dos pirámides una triangular ABCD, y otra cuadrangular CBEFD. En la cuadrangular CBEFD tiraremos un plano CDE, determinado por las aristas CD, DE, de cuya seccion resultarán otras dos pirámides triangulares que tendrán una altura comun y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tretraedros equivalentes, á saber; el ABCD=DEFC, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide DEFC, consideramos como base el triángulo EFC, y como cúspide el punto D, esta pirámide será equivalente á la CBED, por tener iguales la base y la altura: así, pues, la pirámide DEFC=ABCD=CBED. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

Ademas, pudiendo dividir toda pirámide en tetraedos de de la misma altura que este, y que tengan respectivamente

por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.° *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.° Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras esta consideracion nos conducirá á decir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

6. *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de su superficie multiplicada por el rádio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de poliedros planos infinitamente pequeños; de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el rádio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el rádio de la esfera ; luego el conjunto de todas ellas, ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del rádio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con r el rádio, resultará la expresion:

$$V=S\times\frac{r}{3};$$

pero $S=4\,r^2\,\pi$

luego $V=\frac{4}{3}\pi\,r^2$

Método para enseñar la geometría.

La geometría debe, en nuestro dictámen, permanecer rigorosamente encerrada en el estudio de sus aplicaciones usuales. En las escuelas deben dejarse á un lado las teorías difíciles de esta ciencia, por lo menos inútiles, cuando no pueden comprenderse bien. La aplicacion mas útil de la geometría especialmente en España, y en general en todas las escuelas rurales, es la agrimensura, que convendría reducir con frecuencia á ejercicios prácticos. La enseñanza, pues, de la geometría en las escuelas debe limitarse á sentar principios fáciles y á demostrar en seguida su aplicacion. Asi, el curso geométrico de una escuela debe ser naturalmente el que sigue.

Nociones de la extension y de las tres dimensiones; de la superficie, del punto, de la línea y explicacion de los signos geométricos.—Diferentes especies de líneas.—De la línea recta.—Aplicacion de la línea recta á las prácticas de la agrimensura.—Medir y trazar líneas rectas y levantar perpendiculares.—Instrumentos de agrimensura.—Uso de ellos para la alineacion.—Triángulos.—Su aplicacion á la agrimensura.—Medicion de triángulos.—Semejanza é igualdad de triángulos.—Aplicacion á la medicion de alturas, puntos inaccesibles, etc., etc.—Polígonos.—Aplicacion á la agrimensura.—Medicion de los polígonos.—Desarrollo de las anteriores nociones.—Práctica general de la agrimensura.—Del círculo y medicion de las figuras circulares.—Idea de los cuerpos sólidos regulares dada por medio de figuras materiales.

DIBUJO LINEAL.

1.ª SECCION.—DEL DIBUJO LINEAL.

§. I. *Definicion, utilidad y aplicaciones del dibujo lineal.*

1. *El dibujo lineal*, tomado en un sentido general, es el arte de imitar los contornos de los cuerpos y de sus diferentes partes, por medio de simples delineamientos y sin el auxilio de sombras y colores.

2. Si retrocedemos al orígen del dibujo lineal, le encontrarémos en el nacimiento de las artes industriales. En todos los tiempos el gefe de un taller, para hacerse entender de sus oficiales, y los oficiales igualmente para entenderse entre sí, se han valido de diseños mas ó menós exáctos, con el objeto de prepararse para el trabajo, ó de practicar lo que habian concebido.

3. No debemos confundir el dibujo lineal con el *trazado geométrico* que se ejecuta con el compas y con la regla, ni con el *dibujo académico*, que rara vez suele conciliar la exactitud con la elegancia. El dibujo lineal es la reunion del uno y del otro.

4. El dibujo lineal, útil á casi todas las profesiones, lo es principalmente para aquellas cuyos trabajos consisten en la imitacion de las figuras. Los carpinteros, los albañiles, los ebanistas, los aserradores, los torneros, los grabadores sobre metales y madera, con particularidad los oficiales que se dedican á la construccion de máquinas é instrumentos, si no conocen á fondo este arte, con dificultad darán un paso en su profesion, porque no podrán comprender ni transmitir sus ideas á los obreros. Si cualquier hombre, en la posicion social mas elevada, tiene en muchas ocasiones necesidad de trans-

mitir claramente su pensamiento por medio de una figura al artesano de que se sirve, el artesano á la vez debe entender el arte del dibujo para comprender los objetos que se le piden y al mismo tiempo dibujarlos para comunicar sus ideas á los obreros subalternos. Así, el albañil, el carpintero de ribera, el de taller, el ebanista, el aserrador, etc., en una palabra, un artesano cualquiera no puede hacer con perfeccion una pieza de su arte, si antes no se ha dado cuenta por medio de un diseño de las dimensiones de todas las partes. El dibujo lineal, pues, es de primera necesidad para las clases inferiores de la sociedad.

5. Hay dos especies de dibujo lineal: ***dibujo lineal á pulso ó sin instrumentos***, y ***dibujo lineal gráfico ó con instrumentos***.

A esto podemos añadir las nociones sobre el *método general* del dibujo, sobre las *proyecciones*, sobre la *arquitectura* y sobre la *perspectiva*.

6. El *dibujo lineal* que se hace á *pulso* consiste en representar los objetos que hay á nuestra vista con una precision, no matemática, sino aproximativa, que en muchos casos es suficiente.

El dibujo á pulso practicado por algun tiempo, da al ojo aquel tino de que tanto necesita, soltura á los dedos y gracia á los contornos.

7. El *dibujo lineal gráfico* consiste en representar los objetos con una exactitud rigorosa, como se requiere en la aplicacion. Pero esto no se puede conseguir sin el auxilio de ciertos instrumentos geométricos, como la regla, el compas, la escuadra, el semicírculo, etc.

8. Antes de entrar en el dibujo gráfico, debe el discípulo ejercitarse en el dibujo sin instrumentos. Este dibujo parece á primera vista mas difícil que el dibujo con instrumentos; pero la experiencia no tarda mucho tiempo en manifestar lo contrario. Los discípulos se ven en los primeros dias muy embarazados en el dibujo sin instrumentos; pero muy pronto quedarán sorprendidos de la facilidad con que en breve tiempo trazan las figuras mas complicadas. Adiestrados en este dibujo, habrán conseguido aquel desembarazo en los dedos,

tan necesario para hacer el uso conveniente del compas, la regla, y demas instrumentos matemáticos.

Si se quiere conciliar los dos métodos, el discípulo deberá trazar el dibujo, primero á ojo, y despues con instrumentos. De este modo podrá rectificar las inexactitudes que en el primero haya cometido.

Cualquiera que sea el dibujo de que hagamos uso, su aplicacion será siempre á las figuras que en último análisis se reducen á dos elementos, la *línea recta* y la *línea curva*, aisladas ó combinadas entre sí.

§. II. *Aplicaciones de la línea recta en el dibujo lineal á pulso.*

1. Llámase *línea vertical* la recta que en su descenso describe un cuerpo, obedeciendo á la fuerza la gravedad. Esta línea está muy bien representada por el hilo de la plomada: entiéndese por *plomada* un hilo sostenido por uno de sus extremos, y que por el otro tiene un pesito ordinariamente de plomo.

Llámase *horizontal* á la recta perpendicular á la vertical.

2. La construccion de la línea horizontal no ofrece dificultad alguna: no sucede lo mismo con la vertical, á causa del hábito que tenemos de dar á la escritura alguna inclinacion de derecha á izquierda.

Si dibujamos sobre la pizarra ó sobre un tablero, la horizontal debe ser paralela al borde superior ó al inferior; y la vertical, á uno de los bordes laterales.

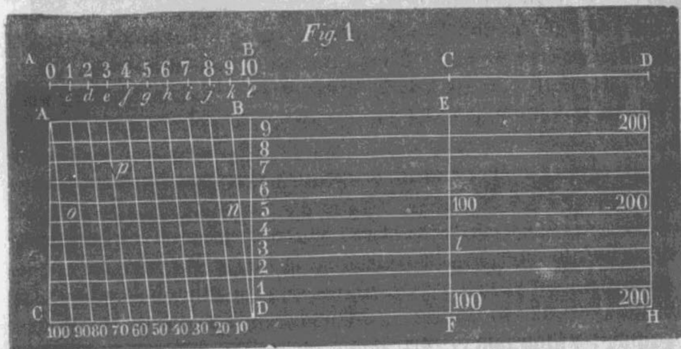
Si queremos formar estas líneas con la regla, tomaremos dos puntos equidistantes, ó del borde horizontal ó del lateral, tirando una recta por estos puntos.

Para comprobar la línea horizontal, mediremos las distancias desde sus extremos al borde superior ó inferior; si esta distancia es igual por ambos extremos, la horizontal estará bien construida.

Si queremos conseguir una prueba mas exacta, haremos uso de la plomada, que deberá confundirse con la línea en toda su longitud, si la vertical está trazada.

3. Llámase *escala de proporcion* una línea AD, (fig. 1),

dividida en partes iguales, cada una de las cuales representa la longitud que se le quiera atribuir; de modo que la figura que representa el objeto tenga con esta escala la misma proporcion que el objeto mismo tiene con su medida real.

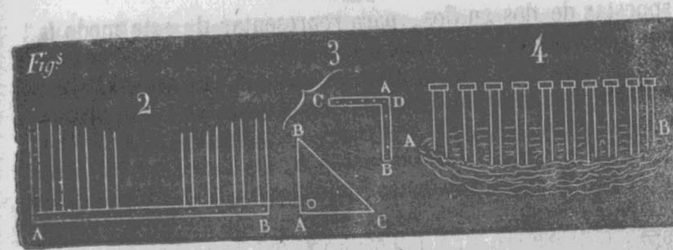


4. La construccion de la horizontal y de la vertical pertenece á los elementos geométricos del dibujo lineal, relativos á la línea recta.

Estos elementos comprenden todo lo que dice la relacion con el trazado de la línea recta en sus diferentes posiciones, la division de esta lína en muchas partes, la construccion de los ángulos y su division, la formacion de los polígonos, es decir, de los triángulos, del trapecio, del rombo, del rectángulo, del cuadrado, la representacion de la pirámide, del prisma, del paralelepípedo, del cubo, etc.; construcciones que en su mayor parte se hallan ya indicadas en las nociones de geometría que preceden á este tratado.

5. Terminados los elementos geométricos, los discípulos entran á dibujar las figuras que se componen de varias rectas combinadas de diferentes modos.

6. Ensambladura de carpintería. Divídese en partes iguales la solera AB (fig. 2), y levántanse perpendiculares segun el grueso y la distancia de los maderos.

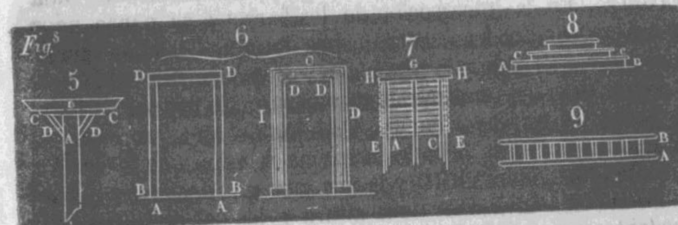


7. Escuadras. Para dibujar la *escuadra ordinaria*, trazaremos el lado AC, sob e este levantaremos la perpendicular AB, y finalmente tiraremos la hipotenusa BC (fig. 3).

La escuadra representada en la fig. 3, se dibuja tirando paralelas á AB y AC, segun la anchura D que se quiere dar al hierro ó á la madera, de que se compone el instrumento.

8. Alineacion de un camino. Levántense sobre una base AB varias verticales igualmente separadas. Estas líneas figuran unas estacas que se llaman *jalones* (fig. 4).

9. Pilastra. Se tirarán líneas verticales, horizontales y oblicuas, segun el grueso de la pilastra A, de la viga B, del capitel C, y de los puntales D. (fig. 5).



10. Jamba. Tómese una base A de la anchura de la puerta; levántense las perpendiculares BD, de una altura que con poca diferencia sea doble de la anchura, y únanse por medio del dintel D. (fig. 6).

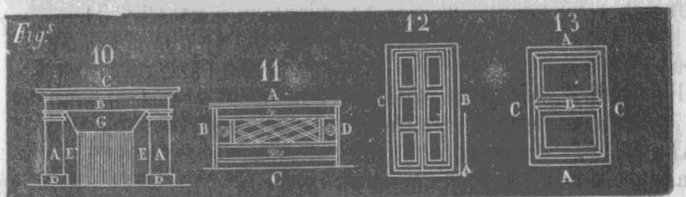
11. Persianas. Consisten en paralelas equidistantes,

dispuestas de dos en dos, para representar de este modo la anchura de las varillas. (fig. 7).

12. Estrado. Se tirarán paralelas á la base AB, haciéndolas sucesivamente mas cortas segun se vayan apartando de la misma. (fig. 8).

13. Escalera. Los largueros A, B, deben ser un poco convergentes, y los escalones equidistantes. (fig. 9).

14. Chimenea. Trácense verticalmente los lados ó jambas A; el travesero B, y la cornisa C que se representan con líneas horizontales: las partes D, D se llaman *zócalos* (figura 10).

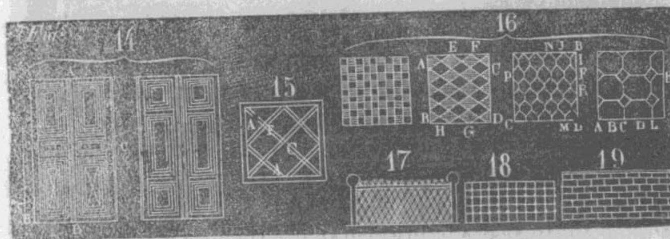


15. Reja. Trácense las guarniciones A, B, C, D, y únanse por medio de rectas los ángulos opuestos de la guarnicion interior, así como tambien los puntos medios de cada travesero. En la interseccion de los barrotes se ponen unos botoncitos que podrán ser de cobre dorado. El antepecho A debe estar adornado con una pequeña moldura. (fig. 11.)

16. Ventana de seis tableros, etc. Se tirará una línea dos ó tres veces mayor que A; se levantará una perpendicular que tenga con la primera la misma relacion que D con A: fórmese el bastidor ABCD y la armazon E; finalmente, háganse las tres divisiones de la altura y las dos de la base, y quedará representado lo restante de la ventana (fig. 12).

17. Puerta de dos tableros. La altura de una puerta podrá ser con poca diferencia doble de la anchura; las líneas C representan las aristas exteriores de la armazon; los tableros son iguales y ensamblados por medio de ranuras con la armazon A, así como el travesero B; y ademas están adornados con una pequeña moldura. (fig. 13).

18. Puerta de tableros pequeños y grandes. Las aristas exteriores de la guarnicion están representadas por medio de las líneas C; y por AB la union de las hojas de la puerta. (fig. 14).



19. Embaldosados. No hay mas que tres especies de polígonos regulares que se puedan ajustar exactamente, sin dejar entre sí ningun vacío; el triángulo, el cuadrángulo y el exágono. Si queremos, pues, embaldosar una pieza con ladrillos iguales que se ajusten exactamente, emplearemos uno de los polígonos mencionados. (fig. 15).

Si se hace uso del octágono, se llenan los vacíos con cuadrados, que tengan su lado igual al del octágono. Cuando el embaldosado se hace con el cuadrado ó con el rombo, ordinariamente se eligen de diferente colores. (fig. 16).

20. Enrejados. En los enrejados que tienen sus agujeros cuadrados y oblícuos, todas las barras son paralelas igualmente apartadas unas de otras, é inclinadas 45° sobre el horizonte. (fig. 17).

21. Resbolillo. Esta figura, muy comun en la jardinería consiste en disponer los árboles de tal manera que presenten calles en todas direcciones. (fig. 18).

22. Pared formada de piedra de sillería. Las junturas de las piedras son, unas verticales, y otras horizontales: por consiguiente, para trazar esta figura, tiraremos líneas horizontales y verticales, de modo que se encuentren alternativamente, como se ve en la figura 19.

§. II. *Aplicaciones de la línea curva en el dibujo lineal á pulso.*

1. Si se nos pide trazar á pulso un círculo sobre la pizarra ó sobre el tablero negro, podrá ser un círculo arbitrario, ó de un rádio determinado, ó que tenga su centro en un punto dado.

Por medio de un ejercicio muy sostenido, consiguen los discípulos describir los círculos y marcar su centro con una exactitud que difiere muy poco de la del compás.

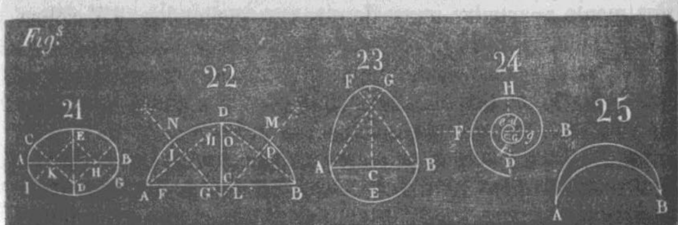
Si en la construccion se nos dan ciertos datos p. ej., el centro del círculo, será ya mas difícil que en la formacion de un círculo arbitrario.

Para comprobar un círculo haremos uso del compas.

2. Las principales figuras curvilíneas son: la *elipse ordinaria*, la *elipse de jardinero*, *el asa de cesta*, *el óvalo y la espiral*.

3. Entiéndese por *elipse una curva cerrada, tal que la suma de las distancias de uno de sus puntos á otros dos que se llaman focos, es siempre igual á la línea que pasa por dichos focos y que termina por sus extremos en la curva.*

Para trazar una elipse, tiraremos dos rectas perpendiculares; se tomarán dos partes iguales por arriba y por abajo, otras dos partes iguales, diferentes de las primeras, á derecha é izquierda del punto de interseccion. Estas líneas, que en el circulo son todas iguales, no lo son en la elipse sino dos á dos; llámase la una *eje mayor*, y la otra *eje menor* de la elipse. (figura 21). Hecha esta construcion, se traza la curva cuidando



mucho de que no resulten corcobos, ni se pierda la continui-

dad. Los cuatro segmentos formados por los dos ejes deben ser exactamente iguales, de modo que, si se dobla la figura por uno de los ejes, los trazados de las curvas coincidan perfectamente cayendo el uno sobre el otro.

De este modo podemos construir á pulso la elipse; bien es verdad que no será con aquella exactitud reservada al trazado geométrico, de que se hablará mas adelante; contentándonos con imitar por el primer medio el contorno gracioso de esta curva.

Cuando mas disminuya el eje menor con relacion al mayor, la elipse será mas prolongada; y cuanto mas aumente, tanto mas se aproximará al círculo. Asi pues, podemos concebir una infinidad de elipses segun la mayor ó menor desigualdad de los ejes.

4. La *elipse del jardinero* es semejante á la elipse ordinaria; pero se construye de otra manera, como veremos mas adelante.

El *asa de cesta* es una curva formada por otras cuatro, de las cuales AN, BM son iguales. (fig. 22).

El *óvalo* es una figura circular formada por cuatro curvas de las cuales solamente las dos, BG y AF son iguales (figura 23).

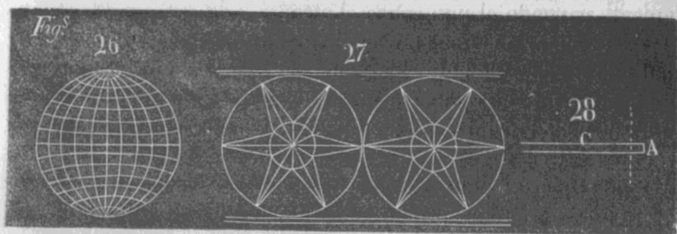
La *espiral* es una línea, que al paso que da vueltas se aparta mas de su centro. (fig. 24).

5. Los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea curva, comprenden todo lo que tiene conexion con el trazado del círculo, segun los diferentes datos que para este objeto se nos den, la construccion de los arcos, de las tangentes, de los polígonos inscritos ó circunscritos, de los cilindros rectos ú oblícuos, de los conos rectos ú oblícuos, de la esfera, etc.; construcciones que en su mayor parte se han manifestado ya en las nociones de geometría.

6. Media-luna. Esta figura se compone de dos arcos, que pasan por dos puntos comunes A y B, y están trazados desde dos centros tomados sobre una línea perpendicular á la recta, que une los puntos A y B (fig. 25).

7. Mapa-mundi. Para hacer esta construccion trazaremos

dos esferas con sus meridianos y círculos menores, que dividan la esfera en zonas. (fig. 26).



8. Trasportador. Consiste este instrumento, como ya en otra ocasion manifestamos, en un semicírculo, cuyo borde está dividido en 180°. Para dibujar un trasportador sobre el el papel, se traza desde luego un semicírculo con su diámetro, procediendo á la division de su limbo del modo siguiente: sobre la circunferencia colocarémos tres veces su rádio, y de este modo quedará dividida en tres arcos iguales, cada uno de 60°: despues dividiremos por su mitad cada uno de los anteriores, cuyo valor será de 30°; haremos con los últimos la misma operacion, de donde resultarán los arcos de 15°; dividiremos cada uno de estos en tres partes iguales, y el semicírculo quedará dividido de 5 en 5 grados; finalmente cada uno de estos se dividirá en 5 partes iguales, y la operacion quedará terminada.

9. Estrella de seis rayos. Trácense desde luego dos círculos concéntricos, es decir, que tengan su centro comun; sus radios serán el uno la mitad del otro; tírense dos diámetros, uno vertical y el otro horizontal; colóquese seis veces desde uno á otro extremo el radio mayor sobre una circunferencia, y de este modo quedará dividida en seis arcos iguales. Hágase lo mismo con el rádio menor sobre un círculo; pero teniendo cuidado de que las divisiones del uno principien desde las extremidades del diámetro vertical, y las del otro, desde el horizontal. Solo falta ya tirar los diámetros correspondientes á los puntos de division, y las oblícuas que unen alternativamente á estos puntos dos á dos.

§. IV. *Aplicacion de las líneas rectas y curvas combinadas en el dibujo lineal á ojo.*

1. Los dibujos usados en las artes se componen en su mayor parte de la linea recta y de la curva, combinadas entre sí.

2. Para que los modelos sean graciosos y elegantes, es preciso que sus diferentes partes sean fracciones sencillas, que desde luego se pueden apreciar. La mitad, la tercera, la cuarta parte, son casi las únicas, á que nuestra vista se puede acostumbrar: saliendo de estas fracciones, entra ya la confusion, porque no podemos juzgar de las proporciones. Esta es la razon, porque el hueco de una puerta ó de una ventana debe ser con corta diferencia dos veces mas alto que ancho.

3. Las superficies llamadas de *revolucion*, como el cilindro, el cono y la esfera, son las mas agradables á la vista: cada seccion perpendicular al eje produce un círculo, curva que inmediatamente reconocerémos donde quiera que se encuentre.

Las molduras son las partes salientes que sirven de adorno en la arquitectura.

Hay tres clases de molduras: las rectas, las circulares y las compuestas,

5. Las principales molduras rectas son: el *filete*, el *larmiea*, y la *faja de la corona.*

El *filete* es una moldura cuadrada y estrecha, tal como nos la presenta la figura 27.

El *listel* es una moldura cuadrada unida inmediatamente en una curva

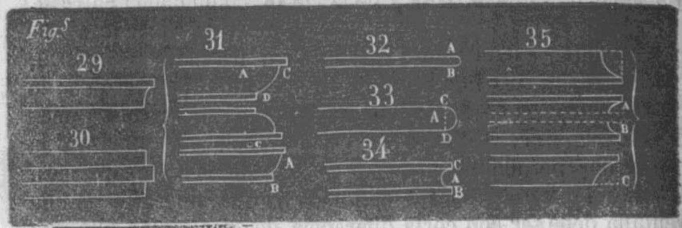
El *larmiea* es una moldura ancha y saliente ahuecada por abajo, y que se coloca en las cornisas para defender el edificio de las lluvias. (fig. 28).

La *faja de la corona* es una moldura ancha y un poco saliente. (fig. 29).

6. Las principales molduras circulares son: *el cuarto-bocel, el junquillo, el toro, la gorguera, el cabeto, la escocia, el talon, y la gola.*

El *cuarto-bocel* es una moldura formada por un cuadrante de círculo y un filete. (fig. 30).

El *junquillo* es una moldura saliente semicircular, y muy estrecha. (fig. 31).

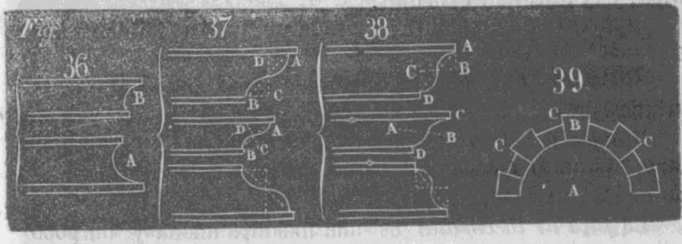


El *toro* es una moldura semicircular que ordinariamente se usa en las bases de las columnas. (fig. 32).

La *gorguera* es una moldura ahuecada semicircular. (figura 33).

El *cabeto* es un cuarto-bocel ahuecado por debajo. (figura 34).

La *escocia* es una moldura ahuecada compuesta de muchos cabetos, cuyos centros se toman arbitrariamente. (figura 35).



El *talon* es una moldura compuesta de un cuarto-bocel y de un cabeto. (fig. 36).

La *gola* es un talon vuelto al revés. (fig. 37).

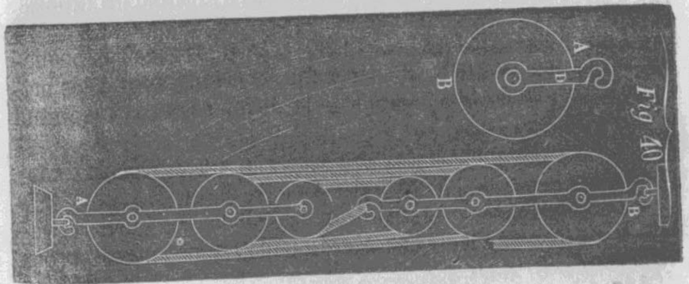
Todas estas molduras se combinan de diferentes maneras formando otras molduras compuestas.

7. En la mayor parte de estas figuras hay una vertical que divide simétricamente el dibujo. Para hacer correctamente estos dibujos, es preciso trazar desde luego este eje, y ajustar los contornos de los dos lados del eje, de modo que resulte en el dibujo una exacta simetría; podemos conseguir este objeto observando la regla siguiente:

Señalar sobre el dibujo que se quiere hacer el lugar que deben ocupar los límites de la parte superior y de la inferior, de la derecha y de la izquierda; marcar en seguida las líneas de las subdivisiones principales, y despues las de menor importancia.

8. Arco de ventana. Esta figura se compone de nueve partes, que representan igual número de piedras de sillería; la del medio B se llama *clave*; las junturas se determinan por medio de radios tirados desde el centro A; y las extremidades, por las cuerdas de los arcos de una circunferencia que pasa por los ángulos. (fig. 39).

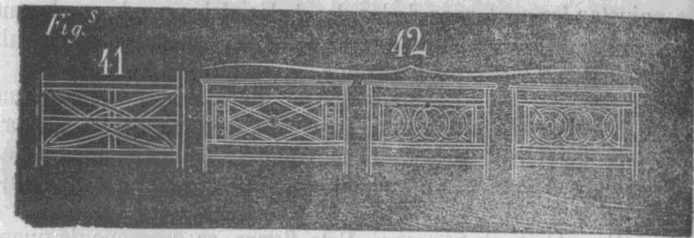
9. Poleas y aparejos. La *polea* se representa por medio de un círculo, á cuyo centro esté adherida la chapa D, figurada por dos líneas rectas que terminan en dos arcos de radios diferentes. (fig. 40).



Llámase *aparejo* un conjunto de poleas colocadas sobre dos chapas diferentes: una de las poleas, A, es móvil, y la otra B, inmóvil, (fig. 40 bis).

10. Rejas. Despues de haber dibujado la guarnicion, se describen arcos entrelazados, cuyos centros deben estar en la

prolongacion de los lados, tirando en seguida los traveseros del medio, como se manifiesta en la figura 41.



11. Reja de balcon. La anchura de las partes destinadas á recibir los arcos tangentes, deben ser un tercio de su altura; lo restante de la guarnicion se dividirá, segun el modelo, describiendo despues los arcos y tirando las rectas del interior, como se representa en la figura 42.

Rejas de círculos tangentes. Para dibujar la primera, entrarán desde luego las guarniciones, de modo que su longitud sea doble que su altura; en seguida se describirán los arcos y los círculos, cuyos centros se hallan todos en una recta horizontal, que divide los lados en dos partes iguales. (fig. 42).

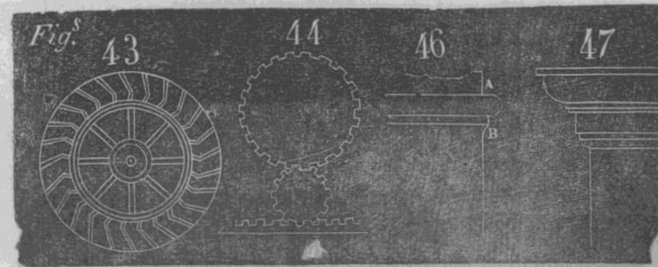
Para dibujar la segunda se trazarán unos círculos pequeños á distancias iguales, y otros mayores tangentes á los primeros, formando finalmente la guarnicion segun la magnitud de los círculos. (fig. 42).

12. Rueda hidráulica. Se trazarán varios círculos concéntricos, como se nos manifiesta en la figura 43.

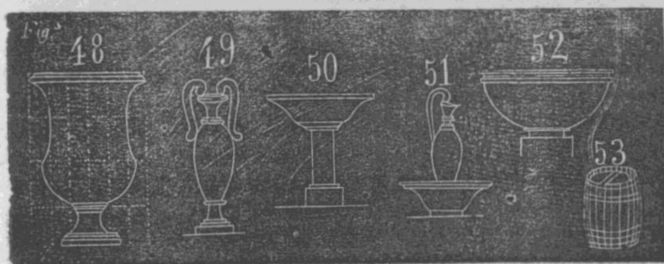
13. Engranaje. Se dividirán las ruedas en partes iguales, para que los dientes se correspondan y engarganten con facilidad. (fig. 44).

14. Astrágalo. Esta figura se compone de un junquillo y un filete. (fig. 46).

15. Cornisa. Se compone de un filete, un cuarto-bocel, otros dos filetes, una faja, otro filete, y un talon, como aparece en la figura 47.



16. Florero. Esta figura se compone de rectas y de arcos de círculos. Los dorados del pie tienen su centro en la línea punteada, (fig. 48).



17. Jarron. Este vaso, formado de un óvalo prolongado, descansa sobre un pie; las asas están formadas por dos círculos concéntricos. (fig. 49).

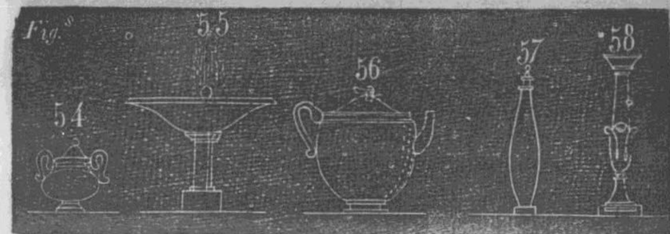
Mesa de jardin. En esta figura, cuya tabla es comunmente de mármol, y la columna de piedra, la moldura es una escocia suave. (fig. 50).

Jarro y aguamanil. Es una semi-elipse que se une de extremo, á extremo sin garrotes, á dos cuartos de círculo; el pie del vaso, su ángulo y cuello son curvas llamadas de *capricho*, porque se trazan sin ley determinada. (fig. 51).

Bol. Véase esta figura (52) que consiste en un semicirculo adornado de filetes paralelos, montado sobre un pedestal muy bajo.

TONEL. Los fondos se representan por dos elipses, y los lados por arcos. (fig. 53).

SOPERA. Una semi-elipse sobre un pedestal figura su capacidad, y la cubierta una curva de capricho; las asas se representan por dos círculos y dos líneas paralelas. (fig. 54).



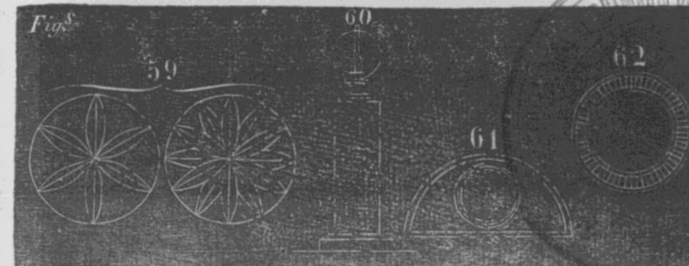
JARRON-FUENTE. Una especie de columna corta sostiene una capacidad formada por una moldura; un globo esférico sostiene la cebolla que ha de verter el líquido. (fig. 55).

TETERA. La parte principal está formada por un círculo; el asa y el pico son curvas de capricho. (fig. 56).

GARRAFA. Se compone de dos partes de elipse; la inferior se pierde en la moldura que sirve de base, y la superior está en armonía con dos arcos. (fig. 57).

CANDELABRO. Esta figura se construye por medio de la vertical; un plinto, un filete y una escocia vuelta forman el pie; la terminacion del árbol se figura por una parte de elipse. (fig. 58).

ROSETONES. Se forman estas figuras con un gran círculo, en el que se colocan diversos arcos; por ejemplo, de un punto cualquiera de la circunferencia, se traza con su radio un arco de círculo; se repite seis veces la misma construccion, tomando por centros los puntos de interseccion, y se tienen seis partes iguales, que son las seis hojas del floron ó roseton. Para hacerle de doce, basta reproducir la operacion precedente, tomando por centro el punto medio de los primeros arcos. (figura 59).



LÁMPARA. Esta figura está compuesta de un cilindro montado por un globo de cristal y tubo cilíndrico, que encierra la mecha y su llama: estas lámparas son muy usadas. (fig. 59).

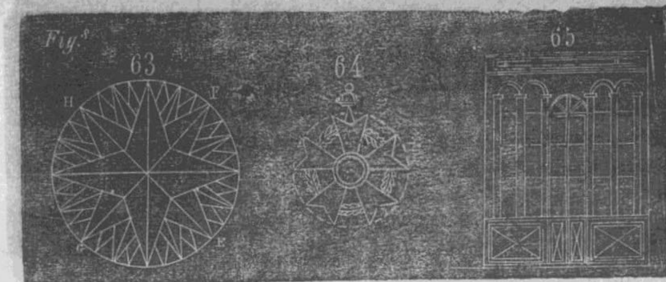
OJO DE BUEY. A veces las puertas cocheras se construyen de arcada en cimbra entera, es decir, semicircular, y en ella se abre una ventana ó agujero redondo ú oval, llamado *ojo de buey*. Para trazar este, se levanta una vertical, cuyo medio es centro de arco de 90° y el círculo interior de estas ventanas es tangente á la cuerda. (fig. 61).

CUADRANTE DE RELOJ. Se describen cuatro circunferencias concéntricas; se divide el espacio comprendido entre las dos inferiores en doce partes para las doce horas; y el espacio de hora en dos para las medias. (fig. 62).

ROSA NÁUTICA. Los cuatro puntos principales designan los rumbos cardinales, *sud*, *norte*, *este*, y *oeste*; los cuatro colaterales, *sud-este*, *nord-este*, *sud-oeste* y *nord-este* son indicados por los puntos E, F, H, G, etc. Para construir la rosa náutica, es menester describir muchas circunferencias y trazar las líneas indicadas por los puntos de division (fig. 63).

CRUZ DE HONOR. Descríbase un círculo, que se divide en diez arcos iguales; los puntos de la division terminan en pequeñas bolas, que figuran los rayos de la estrella: los diámetros correspondientes marcan la inclinacion de las ramas. Se trazan otros dos círculos concéntricos al primero, para recibir el uno la leyenda, y el otro las ramas de laurel. (fig. 64).

PORTADA DE TIENDA. Los cruzados están compuestos de ocho cuadrados; los bastidores están separados por una co-



lumna medio-saliente, que sirve de apoyo á los arcos que forman ɐ ɔ ɔ p los cuadrados superiores; el basamento G es de cuarterones tallados á punta de diamante, y el friso AB está destinado a recibir el rótulo. (fig. 65).

2.ª SECCION.= DEL DIBUJO LINEAL GRAFICO.

§. 1.° *Del dibujo lineal gráfico en general.*

1. Los instrumentos necesarios para el dibujo lineal gráfico son: la *regla*, el *compas* con su *tiralíneas* y su *porta lapiz*, un *semicírculo* de talco, un *tiralíneas*, y una *escala de proporcion*.

2. En las nociones de geometría hemos hecho la descripcion de la regla y del compas, manifestando al propio tiempo el uso de estos instrumentos.

3. El tiralíneas se compone de dos lengüetas de acero muy delgadas y terminadas en puntas romas. Para hacer uso del tiralíneas, se llena de tinta el espacio comprendido entre las dos lengüetas, cuya operacion se llama cargar el tiralíneas. Para esto se sumerge en la tinta, habiéndolas humedecido antes con la boca ó en agua, y teniendo cuidado de limpiar su exterior. Cargado el tiralíneas, se corre á lo largo de la regla; el vestigio de tinta que deje será una recta, cuyo grueso dependerá de la separacion de las lengüetas. Para aproximarla, segun queramos, tiene una de ellas un tornillo, por medio del

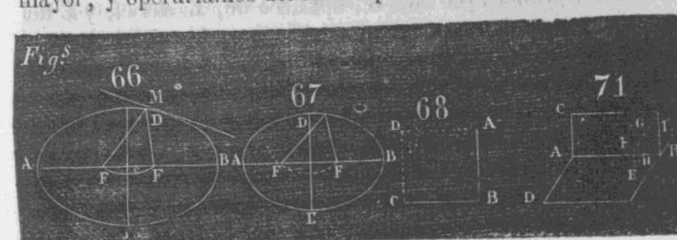
cual se puede acercar á la segunda, segun el grueso que á la línea se quiera dar.

4. Los elementos geométricos del dibujo lineal gráfico comprenden todas las construcciones relativas á las líneas rectas, oblícuas, perpendiculares y paralelas; la formacion de los ángulos, del cículo, de los polígonos, etc., construcciones que hemos indicado ya en la geometría.

§. 2.° *Del dibujo lineal gráfico, de las figuras curvilíneas y de las molduras.*

1. Para trazar una elipse ordinaria se tirará la recta AB de la longitud de la elipse que se quiere dibujar; se divide esta línea en tres partes iguales AK, KH, HB; sobre la parte HK se formarán los triángulos equiláteros HEK, HDK; finalmente, desde los puntos H y K, como centros, trazaremos los arcos LAC, IBG, hasta los lados prolongados de los triángulos, y desde los puntos E y D, y con un radio igual á EL se describen los arcos LG. CL. (fig. 21).

Podemos tambien construir la elipse del modo siguiente: tomando por centro la extremidad del eje menor, y por radio el semi-eje mayor AC, se traza FF' que cortará el eje mayor en F y F', puntos que se denominan *foco* de la elipse; despues, tomando un cordon, cuya longitud sea AB, se fijan sus dos extremos el uno en F y el otro en F'. Si por medio de un punzon ponemos tirante el cordon, para que tome la figura de una línea poligonal F'MF, el punto M corresponderá á la elipse. (fig. 66). Si solamente se nos diese el eje menor, lo prolongariamos una cuarta parte, con lo cual tendremos e mayor, y operariamos del modo que se acaba de indicar.



2. Para trazar una elipse de jardinero, conocidos los dos ejes AB, DG, se cruzan perpendicularmente y por su mitad: desde la extremidad D del eje menor, y con una abertura de compas igual á la mitad AC del mayor, se describe el arco EF que corte al eje mayor en E y en F; tómase despues un hilo ó un cordon de igual longitud al eje mayor; y fijando sus extremos, el uno en E y el otro en F, se corre el punto por el pliegue M del cordon. (fig. 67).

3. Para construir el *asa de cesta* de base y altura conocidas, levantaremos sobre la mitad de la base, AB, la perpendicular DC, igual á la altura del asa; uniremos las extremidades de esta base al punto D de la perpendicular; desde el ángulo C se colocará en F la altura CD, y desde D se pondrá en O y en H la diferencia AF de los semi-ejes; levantándose sobre el medio P é I de BO y AI las perpendiculares PE, IE, que se encuentran en el punto E del eje CD prolongado, los puntos L y G serán los centros de los arcos BM, AN, y el punto E el del arco MDN. De este modo tendremos la figura que queremos construir. (fig. 22).

4. Si queremos trazar un *óvalo*, sobre la mitad de AB levantaremos la perpendicular CD; desde C se colocará en D la longitud AC; se tiran las rectas AB, BD prolongadas mas allá del punto D; desde el punto C, y con su radio igual á AC se describirá la semicircunferencia AEB; desde las extremidades A y B del eje menor se trazarán los arcos BG, AF; finalmente, desde la interseccion D se describe el arco FG, y tendremos construido el óvalo. (fig. 23).

5. Para trazar la *espiral*, se tiran las cuatro líneas AB, cd, E f, g H, de modo que formen un cuadrado. A, será el centro del primer arco cd, G, del arco de, E del ef, y C del arco fg, y si se da una segunda revolucion, A, será todavía el centro del arco gh, etc. (fig. 24).

6. Para construir un *cuarto bocel*, tomaremos la altura perpendicular AD de la salida de la moldura, y desde el punto A se trazará el arco CD. (fig. 31).

7. Para trazar el *junquillo*, descubriremos una semicircunferencia, cuyo centro será el punto medio de la perpendicular AB, que representa el alto de la moldura. (fig. 32).

8. El *toro* se construye trazando una semicircunferencia, cuyo centro sea la mitad de la perpendicular CD, que manifiesta la altura del toro. (fig. 33).

9. Para trazar la *gorguera*, se describe una semicircunferencia que tenga por centro el punto medio de la perpendicular CB, y por radio la mitad CA de la altura de la gorguera. (fig. 34).

10. Para trazar el *talon*, se tira la línea AB; despues dividiremos la salida de la moldura por medio de la perpendicular D, y prolongaremos la línea B; el punto D será el cento del cuarto bocel, y el punto C el del cabeto que forma el talon. (fig. 37).

3.ª SECCION.= APENDICE AL DIBUJO LINEAL.

§ 1.º *Del modo general para dibujar las figuras.*

1. Toda figura, por complicada que sea, puede reducirse á rectángulos ó círculos. Es necesario, pues, que los alumnos ejecuten correctamente rectángulos de un lado horizontal y otro vertical; ejercitándoles seguidamente en dividir los lados en mitades, cuartos, etc. Lo mismo practicarán con los círculos.

2. Deben anticiparse los discípulos á ocuparse del conjunto con preferencia al dibujo de los detalles. El que traza los delineamientos aproximadamente para expresar en seguida todos los detalles que percibe en los contornos de su modelo, abraza á la vez un gran número de relaciones, que no pueden marcar. Ademas, la distancia entre dos trazos próximos que haya formado, le sirve de escala para apreciar la distancia á que debe sujetar el trazo siguiente; pequeños errores en cada evaluacion, conducen de uno en otro á errores mayores por la acumulacion, y los contornos exteriores salen de tal modo deformes que es imposible reconocer el modelo en la copia.

Al contrario, si el conjunto se traza aproximadamente bien en la copia, los detalles vendrán á colocarse en ella con facilidad; los errores que se hayan podido cometer, serán mucho menos sensibles é influirán considerablemente menos en el aspecto general. Asi es, que, si se ensayase hacer una rueda dentada, dibujando desde luego diente por diente, jamás se lograria el objeto, pero, si se comienza trazando el círculo de la rueda, y se divide en partes próximamente iguales, nada será mas fácil que hacer una figura de las dichas, bastante regular.

3. Para colocar cada parte de un dibujo en su lugar propio, ó en otros términos, para trazar bien un conjunto, basta saber dibujar circunferencias y rectángulos.

Se miden en mitades, cuartos, etc., segun la extension, las dos líneas verticales opuestas que forman el cuadro del modelo; por los puntos de division del mismo rango se tiran líneas horizontales, que forman bandas; se practica otro tanto en las dos bandas superior é inferior del cuadro, y se tira una série de verticales equidistantes; en fin, se hace absolutamente lo mismo en la hoja que debe recibir el dibujo. De este modo el modelo y la hoja quedan descompuestos en rectángulos iguales. Se marcan en seguida sobre esta hoja en cada rectángulo los puntos que en él ocupen el mismo lugar que los que se han distinguido, mas notables en el modelo, y se ejecuta en seguida el conjunto del dibujo.

4. Cuando el discípulo ha adquirido por este procedimiento un hábito suficiente de trazar los rasgos principales, se le acostumbra poco á poco a pasar sin cuadrados, despues á hacerlos mas extensos, luego haciéndole sustituir líneas ideales á las matemáticas de la cuadrícula. No deberá trazar estas rectas sino sobre el papel; de ningun modo en el modelo, donde se contentará con imaginarlas. Podrá servirse de un doble decímetro ó de su porta lápiz; sosteniéndole vertical ú horizontalmente delante del ojo, se servirá de un nivel ó de un hilo á plomo, que le permitirá distinguir en el modelo los puntos principales de sus direcciones, evaluar las distancias de los puntos próximos, y colocarlos en los cuadrados de su papel.

Mas adelante el discípulo ya no trazará cuadrados, ni aun en la copia. A falta de rasgos reguladores, podrá colocar todos los puntos principales del conjunto, unirlos por trazos, indicar por la figura circular las curvaturas de los contornos, descender á los detalles, completar, en fin, su dibujo.

Este método puede aplicarse al dibujo de la *naturaleza.*

Para reducir los dibujos á menores dimensiones, se hace primeramente en el papel un cuadro semejante al del modelo; se dividen los dos rectángulos por un número igual de horizontales equidistantes, y se hace lo mismo con las verticales; estas líneas dividirán las dos superficies en otros tantos rectángulos geométricamente semejantes de dos partes; los rectángulos hechos en el modelo serán iguales entre sí; lo serán tambien en la copia; pero los primeros no lo serán respecto á los segundos. El resto de la operacion no consiste en otra cosa que en trasportar cada punto notable del modelo que le conviene á la copia, es decir, al rectángulo del mismo rango, y en un punto de este rectángulo, colocado como lo está en el original.

Los ejercicios versarán despues sobre reducciones sin el socorro de la cuadrícula en el modelo, y luego sin servirse de ningun rectángulo.

Si la copia debiese ser mayor que el modelo, se seguirá la misma marcha, pero en sentido opuesto.

§ 2.° *De las proyecciones.*

1. Se llama *proyeccion* de un punto sobre una línea ó sobre un plano al pie de la perpendicular bajada desde este punto sobre la línea ó sobre el plano.

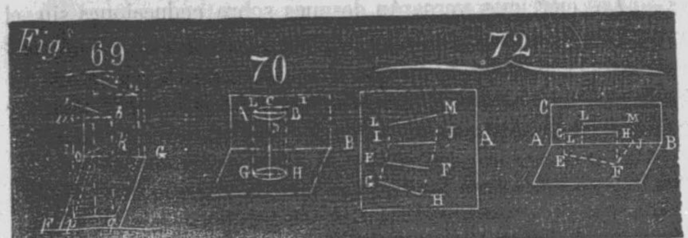
Asi en la figura 68, B es la proyeccion de A sobre BG, y D es su proyeccion sobre GD. Respecto á los planos DAB, GAB (fig. 71), que se suponen perpendiculares entre sí, E, es la proyeccion del punto F, supuesto en el espacio sobre el plano DAB, y G su proyeccion sobre el plano GAB.

Es indispensable estudiar la teoría de las proyecciones. En efecto, un dibujo, por fiel que sea, puede muy bien dar una idea de la forma exterior de los cuerpos y de sus situaciones mútuas; pero no podria servir de guia seguro al operario que quisiese deducir la figura y las dimensiones de las piezas de que se compone; porque alguna de estas piezas no está vista bajo su verdadera forma, y porque la disminucion de la perspectiva altera el tamaño y la situacion relativa. Esto, que no puede obtenerse en un dibujo ordinario, se halla fácilmente por las proyecciones.

2. Hay dos especies de proyecciones: la *horizontal* y la *vertical*. Se llama horizontal la que está sobre la línea ó el plano horizontal; y vertical la que está sobre la línea ó plano vertical.

3. La proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta, de longitud y direccion diferentes, que terminan las proyecciones de sus dos extremidades ó de dos de cualesquiera de sus puntos.

En efecto, imaginemos dos planos, el uno horizontal FG, el otro vertical GH, y una línea recta *b*, *c*, situada en el espacio. (fig. 69).



Si de todos sus puntos se tiran perpendiculares al plano FG, para tener las proyecciones de los puntos de la recta, los piés de estas líneas marcarán sobre este plano la línea recta *pq*, que será la proyeccion horizontal de *b c*. De la misma manera las perpendiculares tiradas sobre el plano vertical GH darán la proyeccion vertical *mn*.

4. La longitud de toda recta en el espacio es el lado mas grande de un triángulo rectángulo, cuyos dos lados del ángulo recto sean, el uno la proyeccion horizontal recta; el otro, la diferencia del nivel de los dos términos de su proyeccion vertical. (fig. 69).

5. Si las figuras son paralelas al plano sobre que se las proyecta, las proyecciones son iguales y semejantes; pero, si el plano de proyeccion no es paralelo al de la superficie, la igualdad ya no existe. Un círculo, por ejemplo, se proyecta segun una elipse; esta, segun otra elipse.

6. Dos rectas paralelas en el espacio tienen sus proyecciones paralelas; pero las proyecciones de dos perpendiculares no son perpendiculares entre sí.

7. Para obtener la proyeccion de un círculo situado en el espacio, es necesario, si el círculo es paralelo á uno de los planos, proyectar sobre este plano su diámetro AB (fig. 70), sobre el cual se describe una circunferencia EGFH, que es la proyeccion del círculo dado; sobre el otro plano será una recta IJ, igual al diámetro del círculo; pero, si es oblícuo con relacion á los planos, se proyectan dos diámetros AB, GD, cruzados perpendicularmente, y sus proyecciones EF, GH son los ejes de la elipse que tiene la proyeccion sobre el plano horizontal; del mismo modo se opera relativamente al plano vertical.

Así es como se proyectan elipses, círculos, etc.

8. Para representar las partes de un edificio, se imagina un plano horizontal, sobre el cual se traza un dibujo semejante al que determinan los piés de las perpendiculares que se tirarian á este plano de las diferentes partes del edificio. Este dibujo se llama *plano geométrico*.

9. Para acabar de determinar las partes notables del edificio, se concibe otro plano perpendicular al primero, sobre el cual se traza un dibujo semejante al que determinarian los piés de las perpendiculares que se tirasen á este plano de las partes notables del edificio. Este plano da la altura de los objetos sobre el plano geométrico.

La figura que resulta se llama *elevacion*, si no hace ver mas que las partes exteriores; *perfil*, si el objeto se vé lateralmente y segun una dimension estrecha; en fin, *corte*, si demuestra el interior de un cuerpo, de un edificio, de una máquina.

10. Todo prisma, ó todo cilindro, elevado perpendicular-

mente á un plano, se proyecta en él segun su base, así como todas las figuras trazadas, segun su superficie.

Un plano es proyectado sobre la horizontal, segun una recta, así como todo lo que se ha trazado sobre este plano; una vigueta vertical lo es segun el rectángulo de su base, etc.

11. En la práctica, para disponer los planos de una manera que se presten á las construcciones, se imajina que el plano vertical ABG (fig. 71) ha jirado al rededor de la interseccion AB, que hace con el plano horizontal, hasta el que se encuentra en la prolongacion de este. En esta rotacion, toda línea GH, perpendicular á la interseccion AB, describe un plano que le es perpendicular, y por consiguiente, esta línea GH se halla en la misma direccion que la línea EH que la corresponde en el plano horizontal.

Resulta de aquí que las dos proyecciones E y F de un mismo punto F, se hallan sobre una misma línea, EI, perpendicular á la interseccion de dos planos.

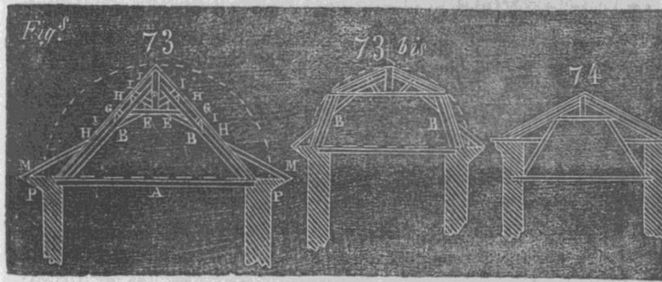
12. Para formarse una idea justa de un objeto, es necesario conocer á lo menos dos proyecciones diferentes de este objeto. La proyeccion vertical determina la longitud del objeto, lo que no hace la proyeccion horizontal; de suerte que por medio de estas dos proyecciones se podria ejecutar el objeto dibujado.

13. Para determinar la longitud de una recta por el conocimiento de sus proyectos, se tiran á las extremidades de la proyeccion horizontal EF (fig. 72), las perpendiculares EG, FH, iguales á LL., JM, y se tira la recta GH, que da la longitud pedida; porque, si se imagina que EFGH, LMGH son planos elevados perpendicularmente, el primero sobre la proyeccion horizontal EF, y el segundo sobre la proyeccion vertical LM, su interseccion comun ha de ser precisamente la recta buscada.

Se determinan las dimensiones de un círculo, operando sobre las proyecciones de su diámetro, como acabamos de hacerlo sobre las de la recta; las de una elipse y de un óvalo, operando de la misma manera sobre la longitud de los ejes.

14. Tejado. El *tirante ó solera* A debe apoyarse sobre el muro P en los dos tercios de su espesor; la circunferencia

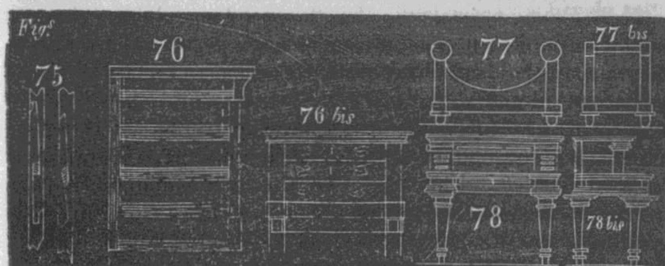
que termina la altura puede tener el largo del edificio por diámetro. La pieza B se denomina *par*; G *tirante falso*; D *punzon*; E *jabalcon*; F *cadena*; G *cabrial*; I *viga*; H *puente*; L *caballete*; M *plata forma*; y P *es el muro*. (figura 73).



Tejado de Mansard. (fig. 73 bis). Las partes que componen este tejado, tienen los mismos nombres que las del precedente; añadiendo la pierna de fuerza R.

Estas dos especies de tejados no se hallan mas que en los edificios antiguos, porque en el dia se hacen de construccion menos pesada y costosa. La figura 74 representa la forma que se les da en la actualidad.

Rayo de Júpiter. (fig. 75). Los carpinteros llaman así el corte que les sirve para reunir sólidamente dos extremos de maderaje para no hacer mas que uno solo, cuando no tienen madera de bastante largo para hacer el mueble de una sola pieza.

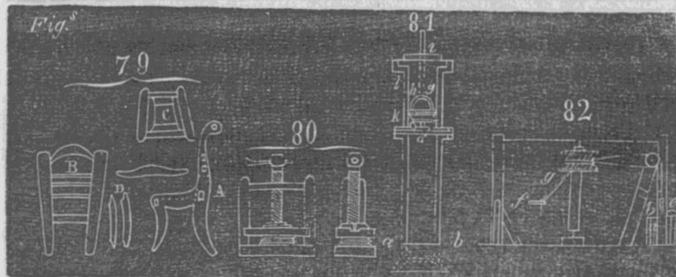


16. Cómoda. Este mueble, cuya elevacion se ve en la figura 76, se construye por medio de horizontales y verticales. La figura 76 *bis*, representa el corte de lado é indica la profundidad del mueble; las paralelas sombreadas dan los cortes de los cajones.

17. Camas de barco. La figura 77 representa su largo; las extremidades A de los rodillos se ven de frente; la figura 77 *bis*, indica el largo del mueble.

18. Escritorio. La figura 78 representa un escritorio; y la parte B un cajon; la figura 78 bis, representa su proyeccion visto de lado; A es el vuelo que hace de mesa.

19. Sillas La figura 79 da las diferentes proyecciones de una silla: A es la vista de perfil; B es el respaldo; C la silla en vuelo, y D los traveseros.



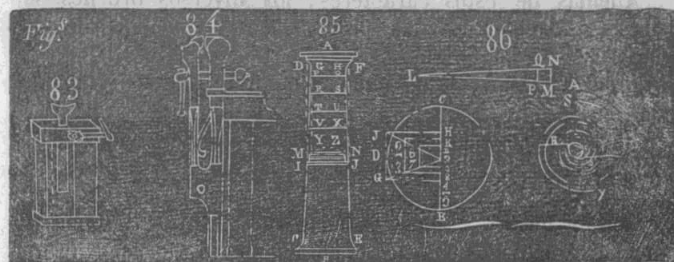
20. Prensa.—(figura 80). A representa la altura y el largo de la prensa vista de frente, y B su grueso visto de lado.

21. Bomba aspirante. La figura 81 es el corte de una bomba aspirante; *ab* es el nivel del agua en el reservatorio ó cubeta del tubo de aspiracion *cd*, y que cierra en su parte superior la válbula *d*. El piston *f*, provisto al rededor de un cuero, cierra herméticamente el cuerpo de bomba *kl*; este piston está unido sólidamente á un estribo de hierro *g*, quesaca é introduce necesariamente la vara *g*. Una válbula *h* abre y cierra uno despues de otro un canal *f* que abre el piston en su longitud; cuando se levanta el piston, la aspiracion hace el

vacío en el interior y fuerza al agua á subir en virtud de la presion del aire exterior sobre el agua *ab* del reservatorio, porque la válbula *d* se abre y la *h* queda cerrada; cuando vuelve á descender el piston es al contrario *h* la que se eleva para dejar pasar el aire ó el agua encima del piston, mientras que la otra válbula *d* queda cerrada bajo la presion.

22. Utiles de los labradores. La figura 82 representa la elevacion de la máquina de los hortelanos para sacar agua del pozo *a*, por medio de un balde *b*, y verterla en una pila *e*, por donde marcha adonde conviene dirijirla. La cuerda *dc*, pasada por la polea *c*, saca el balde y se enrolla sobre un tambor haciendo jirar el árbol vertical *pd* que se pone en movimiento por medio de un manubrio. Y un caballo sujeto á *af*, ya un hombre, obrando sobre la extremidad de la bara *fg*, da vueltas al rededor del árbol *pd*. La cuerda enrollándose en el tambor, hace subir uno de los baldes mientras desciende el otro, y es necesario voltear el árbol en sentido contrario para hacer subir á su vez el que se ha llenado, y bajar el primero que está vacío.

23. Gato. Máquina destinada á levantar pesos. (fig. 83).



24. Torno de cerrajero. Como demuestra la figura 84.

§. 3.° *De la arquitectura.*

1. La *arquitectura* es el arte de construir ó edificar.
2. Hay cinco órdenes de arquitectura, el *toscano*, el *dó-*

rico, el *jónico*, el *corintio* y el *compuesto*.

3. Se distinguen tres partes principales en cada órden: la *columna*, el *entablamento ó cornisamento* y el *pedestal* que la sostiene.

Estas tres partes no se hallan siempre en la ejecucion de cada uno de los órdenes, porque la atribucion del nombre de un órden á un edificio no depende siempre de las columnas, sino tambien de las proporciones observadas en el conjunto de sus partes: á veces tampoco hay columnas, y el pedestal es: á con frecuencia reemplazado por un plinto.

Cuando el pedestal circuye á todo el edificio se llama *estylobato ó casamento*; cuando el entablamento no es de friso, la cornisa descansa inmediatamente en la *arquitectura*, y se llama entonces *arquitecturado*.

4. Se distingue el toscano por la simplicidad de sus partes, que no admiten adorno alguno; el dórico, por los tríglifos y las metopas del friso; el jónico por las volutas de su chapitel: el corintio, por la doble fila de hojas de ocanto y las ocho volutas de su chapitel; en fin, el compuesto, por el chapitel corintio unido á las volutas del jónico.

Ademas de estos caractéres, los diversos órdenes se distinguen tambien por las proporciones respectivas de sus partes.

5. El pedestal, la columna y el entablamento se divide cada uno en tres partes.

El pedestal. . . . . en *cornisa*. . . . . *neto*. . . y *base*;
la columna. . . . . en *base*. . . . . . *fuste*. . . y *chapitel*;
el entablamento. . en *arquitectura*. . *friso* . . y *cornisa*.

4. En todos los órdenes el entablamento tiene por altura la cuarta parte de la columna, y el pedestal, la tercera.

6. El grosor de la columna es proporcionado á su órden, á su altura y á la elevacion total del edificio.

La columna toscana tiene por altura, comprendiendo la la base y el chapitel, siete veces su diámetro; la dórica, ocho veces; la jónica, nueve veces; la corintia y la compuesta, diez veces.

7, Se llama *módulo* el radio de la columna ó la mitad

de su grosor, que, una vez determinado, da la altura del piso, de la cornisa; del fuste, etc.

El módulo está dividido en 12 lonjitudes iguales ó minutos en el órden toscano y el dórico, y en 18 en los otros tres.

8. Véase la tabla de la altura total y del *intercolumnio* ó intervalo de las columnas en cada órden:

	ALTURA TOTAL.	SIN PEDESTAL.	INTERCOLUMNIO.
O. toscano módulos.	22 1/2	17 1/2	4 1/2
O. dórico	25 1/3	20	4 1/2
O. jonico.	28 1/2	22 1/2	4 1/2
O. corintio.	31 2/3	25	4 2/3
O. compuesto.	51 2/3	25	4 2/3

9. Las *pilastras* son columnas cuadradas (paralelepípedos) que rara vez se aislan; se las embute en la pared dejando saliente como un tercio ó un cuarto de módulo. Por lo demas, sus adornos, como chapiteles, base, y todas las proporciones en fin, se arreglan segun los preceptos del órden á que pertenecen.

10. La columna es ordinariamente cilíndrica hasta el medio de su altura, desde cuyo punto va disminuyendo; de manera que el diámetro de su parte superior es un sexto menor que el de su parte inferior. Ciertos aquitectos la hacen disminuir abajo.

Veamos la manera de trazar la dimension de la columna.

Despues de haber tirado el eje A B (fig. 85) de la columna, trazando las paralelas CD, EF, y llevando de D á G y de F á H la disminucion dicha, se tira el diámetro IJ, en su tercio; se describe sobre este diámetro la semicircunferencia IMNJ: se tiran en seguida GM, paralela á CD hasta encontrar la semicircunferencia; se divide el arco IM en seis partes iguales, y por estos puntos se tiran paralelas al diámetro IJ: MN será siempre igual á GH. Se ejecutarán las otras paralelas por órden hasta las dimensiones de la columna PO, RS etc., y sus extremidades serán los puntos por donde deberian pasar las curvas que denotan la disminucion de la columna.

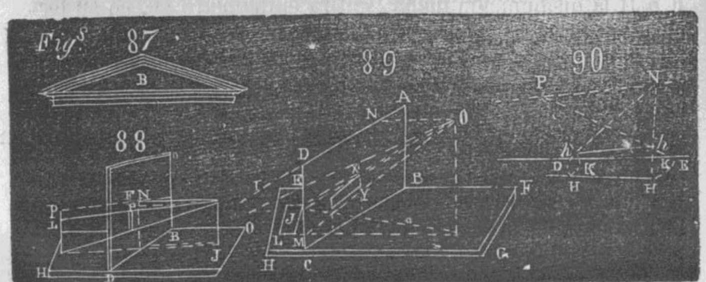
Si la disminucion debiese comenzar en la parte inferior de la columna, se haria en CE lo que se ha dicho en IJ.

11. La *voluta* es un adorno del chapitel en forma de espiral.

Sea AB la altura de la voluta jónica (fig. 86) se la divide en 16 partes iguales ó minutos; de la 9.ª division O y un radio igual á un minuto, se describe el ojo CDEF de la voluta; se construye sobre la recta 9 H, compuesta de la mitad de los radios OC, OE el cuadrado HJG 9; se forman ángulos J y G en el centro O, con las rectas JO, GO; se divide el lado H 9 en 6 partes iguales; se construye su cuadrado sobre 1, 4 y sobre 5, 8; los ángulos HJG9 serán los centros de la 1.ª vuelta, que comienza en A; los ángulos 1, 2, 3, 4, los de la segunda y 5, 6, 7, 8 los de la 3.ª, que debe terminar en C.

Para determinar los centros de la 2.ª revolucion, se tira una recta MC=AH; se lleva el largo del listel de M á P ó se eleva la perpendicular PQ; se junta el punto N al punto L; se lleva PQ al eje de la voluta de O á K y T; se divide TK en seis partes iguales; se renueva la operacion hecha en H9 y los ángulos de los tres cuadrados puntuados son los centros de la segunda revolucion de la voluta, que se describe en el mismo órden que la 1.ª á partir de la segunda division S.

12. El *frontis* es un adorno de arquitectura ordinariamente triangular (fig. 87). El espacio B comprendido entre las cornisas que le forman, se llama *tímpano*: es susceptible de recibir esculturas, objetos alegóricos, etc., hasta cierta extension.



La altura de los frontis varía: los pequeños tienen por altura la mitad de la base; pero esta altura disminuye á medida que la base es mayor; algunas veces, en este último caso, la altura no es mas que un quinto de la base.

13. Se llama *imposta* la parte de un pie recto sobre el cual comienza un arco.

Las *archivoltas* son bandas largas y arqueadas, salientes sobre el nudo de una pared.

Los *artesonados* son diversas esculturas, que sirven para adornar la plataforma de los entablamentos y de las cornisas.

14. Para dibujar un órden en una altura dada, se divide esta altura en 19 partes iguales; se dan 4 al pedestal, 12 á la columna y 3 al entablamento. La altura de la columna se fija de esta manera: si se trata del órden toscano, se la divide en 7 partes iguales, si del dórico, en 8; si del jónico, en 9; si del corintio ó compuesto, en 10. Cada una de estas partes será el diámetro inferior de la columna del órden que se quiera construir; el módulo de la escala sobre la cual se han de determinar las otras partes del órden, debe ser igual á la mitad del diámetro.

§. 4. *De la Perspectiva.*

1. La *perspectiva* es el arte de representar los objetos tales como los vemos, por el solo conocimiento de sus posiciones relativas y de sus dimensiones geométricas.

2. Véase el fundamento de toda la perspectiva. Imagínese que un cristal D N E (fig. 88.) interpuesto entre los objetos y el ojo del dibujante. De este ojo parten los rayos visualés que siguen los contornos del objeto, y va cada uno á encontrar el cristal en un punto, donde dejan una impresion. Es claro que si se da á la imágen determinada por este contorno colores semejantes á los del objeto, este aparecerá en el cristal cuando se quite: esta semejanza es lo que se llama perspectiva.

Resusta de aquí que todo objeto paralelo al cristal no cambia, ni de forma, ni de direccion en la imágen que en él determinan los rayos visualés; pero que esta imágen disminuye de tamaño á medida que el objeto se aleja del espectador.

3. El plano A B C D. (figura 89.) se llama *cuadro*; la recta B C, *línea de tierra*; el plano E F G H, *plano geométrico*; sobre este plano se encuentra la proyeccion de los objetos que se quieren poner en perspectiva.

La línea A I, paralela á la línea de tierra B C, que se imagina pasar por la proyeccion N del ojo, se llama *línea de horizonte*; el punto N, *punto de vista*; y el punto I, distante del punto O, como el ojo lo está del cuadro, *punto de distancia*.

4. Se llama *punto de huida* el punto del cuadro por donde pasa la prolongacion de la perspectiva de todas las paralelas. Se le halla en la parte del cuadro donde pasa la recta dirijida del ojo paralelamente á las líneas dadas.

5. La perspectiva de una recta es siempre una recta; esto es claro.

Las líneas paralelas entre sí, pero que no lo son al cristal, tienen sus perspectivas convergentes á un mismo punto, que es el de huida; una calle de árboles nos ofrece un ejemplo de esto.

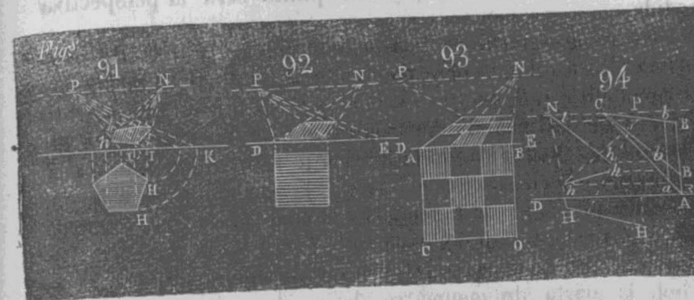
La perspectiva de una vertical es siempre vertical, pues que es paralela al cuadro.

6. Para hallar la perspectiva de un punto H situado sobre el horizonte (fig. 90) se baja desde este punto la perpendicular H I á la línea de tierra D E, y se tira desde I la línea IN, que va al punto de vista N; se toma en seguida I K=I H, y se lleva desde K la línea K P al punto de distancia opuesto: estas rectas I N, P K se cruzarán en el punto *h*, que es la perspectiva de H.

Reproduciendo la misma construccion para todos los puntos que se quiera, situados sobre el plano geométrico, y juntando por rectas las perspectivas así obtenidas, se tendrá la perspectiva.

Resulta que para hallar la perspectiva *h h'* de una recta H' H trazada sobre el horizonte (fig. 90 y 91) basta buscar la perspectiva de dos puntos H H' de esta recta.

7. 1.° Para poner en perspectiva un polígono dado sobre el plano geométrico, se buscan las perspectivas de todas las extremidades superiores (fig. 91.)



2.° Si se trata de un cuadrado situado sobre el horizonte paralelamente á la línea de tierra (fig. 92) se ve que las perspectivas de los lados paralelos de la línea de tierra, son tambien paralelas á esta línea; pero que los lados perpendiculares tienden al punto N.

3.° Si se trata de un piso embaldosado de losas cuadradas (fig. 93) se llevan, á partir de A en D E, las longitudes sucesivas iguales al lado del cuadrado de las baldosas, y por estos puntos de division, se tiran líneas al punto de vista N; despues desde B se dirige una línea B P al punto de distancia opuesto P; la cual cortará á las primeras en los puntos, por los cuales se tirarán paralelas á la línea de tierra D E, y los cuadrados así formados serán la perspectiva pedida.

8. Para hallar la perspectiva de un círculo colocado sobre el horizonte, se divide la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo en 6; se busca la perspectiva de cada uno de los puntos de division que determina el paso de la curva y se obtiene una elipse, perspectiva del círculo.

9. Para hallar la perspectiva de un punto situado en el espacio (fig. 94) se busca desde luego la proyeccion horizontal H de este punto, de donde se tira la perspectiva *h*; la vertical indefinida levantada en H es tambien una vertical *hl*. Ya no falta mas que determinar el punto *l* en donde

debe limitarse la vertical, y este punto será la perspectiva pedida.

Para conseguirlo, se tira aparte una vertical A B, de la misma altura que la correspondiente al punto H, y de las dos extremidades A B, se tiran rectas A C, B C á un punto arbitrario C de la línea de horizonte; con lo cual se forma un triángulo A B C. Tirando la línea *h a* horizontalmente se tiene un punto *a* de seccion con A C; la vertical *ab* será la altura buscada; asi será menester tomar *hl=ab* y *l* será la perspectiva del punto del espacio; *hl* será la de la vertical levantada en H: esta vertical es el eje de una columna, de un árbol, la arista de encuentro de los dos muros etc.: hecho esto se obtendrá asi la perspectiva.

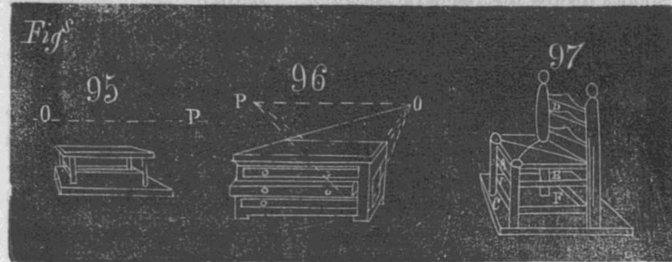
Si se tiene una serie de objetos de iguales alturas á iguales distancias del cuadro, sus proyecciones estarán sobre una recta paralela á la línea de tierra D E; se tendrán fácilmente las perspectivas de las bases, y la altura *ab* será la misma: estas perspectivas serán tambien equidistantes, si los objetos están igualmente separados; en el caso contrario, se repite en cada uno de ellos la construccion precedente. Esto se aplica á las series de columnas, calles de árboles y soportales.

Por medio de este método es fácil hallar la perspectiva de una pirámide, de una línea oblícua en el espacio, de un prisma recto, de un cubo, un cono, un cilindro, etc.

10. Cuando el objeto en perspectiva está dibujado, se borran las líneas de construccion, y las proyecciones horizontales para no dejar en el papel sino la perspectiva obtenida en la montea ó planta.

11. No se ven distintamente de un golpe sino los objetos comprendidos en la abertura de un ángulo de 60° ó á lo mas de 90°: esta primera condicion determina un límite de aproximacion de los objetos que se quieren dibujar. Por otra parte, si estamos muy alejados de los detalles, no se les puede apreciar; lo cual da otro límite en sentido contrario, segun la multitud y delicadeza de estos detalles.

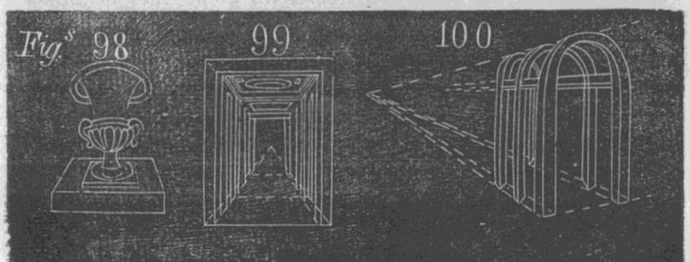
12. Perspectiva de una mesa.—(fig. 95). El punto de vista está en O, un poco elevado, pues que mira la parte superior de la mesa; el punto de distancia está en P, á una distancia del punto O igual á la del ojo respecto á a mesa y en la misma direccion horizontal.



13. De una cómoda. (fig. 96). El punto de vista O está en una posicion contraria á la del dibujo precedente, como igualmente el punto de distancia P; lo cual hace ver el objeto en un sentido diferente. El ojo del observador está en una posicion horizontal con relacion á O, y á una distancia OP.

14. De una silla. (fig. 97). Los puntos de vista y huida están en la parte donde las paralelas horizontales ABCDEF etc., van á encontrarse por la convergencia; estas líneas se suponen perpendiculares á la línea de tierra de la mesa que recibe la perspectiva.

15. De un vaso.—(fig. 98). Este vaso se supone de una grande dimension, pues que el punto de vista, colocado en frente del medio de la altura, permite percibir la parte superior del pie y la inferior de la moldura superior.



16. La figura 99 es la perspectiva de una serie de piezas de armaduras puestas á escuadra colocadas las unas hácia abajo, las otras horizontalmente, formando hileras sucesivas. La mayor parte de los talleres de manufacturas, de los almacenes, etc., están construidos de esta manera.

La figura 100 es la perspectiva de una série de arcadas vistas lateralmente.

AGRIMENSURA.

PRIMERA SECCION.

TEORIA DE LA AGRIMENSURA PROPIAMENTE DICHA.

§. 1.° *De la agrimensura en general.*

1. La *agrimensura* es el arte de medir y determinar la extension superficial de un terreno.

Comprende ademas la reparticion de las heredades entre los propietarios, la deslindacion de los campos, la preparacion de las labores, reparticion de plantacion, etc.

2. La palabra *agrimensura* viene de *agri* (campo) *mensura* (mediacion) palabras de oríjen latino.

La *de cubicacion* tiene su oríjen en la unidad de medida que generalmente se toma, y es el pie cúbico.

3. Desde el momento en que las sociedades se formaron, los pueblos han debido recurrir á la agricultura: de aquí la necesidad de fijar y reconocer los lindes de los campos.

«Los egipcios, dice Rollin, para conocer sus tierras cubiertas todos los años por las inundaciones del Nilo, tuvieron precision de acudir á la *agrimensura*, que bien pronto les ha enseñado la geometría y el levantamiento de planos.» Tal es el oríjen presunto de la agrimensura.

4. La agrimensura se divide en partes: 1.ª la *agrimensura propiamente dicha;* 2.ª el *levantamiento de planos*, ó el arte de representar en pequeño sobre papel, la forma y los accidentes de un terreno, conservando las proporciones del conjunto y sus detalles; 3.ª la *aguada de los planos*, ó el arte de distinguir sobre un plano las diferentes especies de tier-

ras ó cultivos, por tintas convencionales, con cuyo medio se rcoonoce al momento lo que es viñedo, bosque, prado, pantano, etc.

5. La teoría de la agrimensura consiste en dividir el terreno, sea en *triángulos ordinarios*, sea en *triángulos rectàngulos*, y en *trapecios rectangulares*, sea en fin, en *triángulos rectángulos* y en *rectángulos*. Los dos últimos medios son los mas simples y fáciles de practicar.

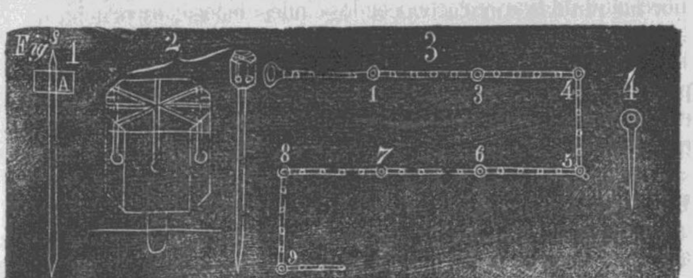
§. 2.° *Instrumentos de la agrimensura.*

1. Las operaciones prácticas de la agrimensura sobre el terreno pueden reducirse á dos cosas muy simples: 1.° medir y trazar líneas rectas; 2.° levantar perpendiculares para subdividir el terreno en triángulos, trapecios ó rectángulos.

Estas operaciones se ejecutan con el auxilio de algunos instrumentos poco complicados.

2. Los instrumentos necesarios al agrimensor son: 1.° los *jalones* y la *escuadra* para trazar las líneas rectas y las perpendiculares; 2.° la *cadena* y diez piquetes para medir las distancias y las líneas.

3. Los piquetes son estaquillas de madera de cuatro á cinco pies, con una tablita en el extremo superior pintada de blanco: la otra extremidad A (fig. 1) terminada en punta, debe exceder de la tablita como una pulgada para facilitar la alineacion.



4. La *escuadra de agrimensor* (fig. 2) se llama generalmente *octágono*, por estar formada de un prisma recto de cobre hueco, de 8 caras iguales de cerca de 5 á 6 centímetros de ancho con doble altura. Un tubo está clavado en su base para recibir la redondeada punta de un baston que debe ajustar bien, y cuyo extremo inferior acaba en punta de hierro, para que la caña pueda fijarse verticalmente en el suelo (fig. 2).

En la parte superior del instrumento hay hendiduras verticales que se llaman *pínula* . Aplicando el ojo por una de estas hendiduras se ven distintamente por la opuesta los objetos situados del otro lado; para lo cual hay una pequeña abertura practicada á lo largo de la hendidura. Cada uno de los lados está provisto de una pínula semejante, de manera que estando estas hendiduras abiertas dos á dos en ángulos rectos, es evidente que el instrumento determina las cuatro direcciones perpendiculares.

El palo de la escuadra está dividido en su parte superior en decímetros, centímetros y milímetros. En él se coloca ordinariamente una plomada para determinar su posicion vertical.

5. Para comprobar la escuadra se elije un terreno bien horizontal en donde se fija. Se clavan á una gran distancia piquetes en las cuatro direcciones perpendiculares dadas por las cuatro caras opuestas del octágono. En seguida se hace girar la escuadra sobre su eje, sin cambiarla del lugar ni trastornar la verticalidad, y si se corresponden los piquetes por las pínulas correlativas de las otras caras, es prueba de la perfeccion de la escuadra.

6. La *cadena de agrimensor*, usada por los franceses, es la cadena métrica: tiene 10 metros y 1 decámetro de longitud. Está formada (fig. 3) de 50 anillos ó eslabones de alambre grueso *ab bc* etc. de 2 decímetros de largo y unidos entre sí. Cada série de 5 eslabones, 1, 2, 3, 4, 5, etc. El 5.° metro, que es la mitad de la cadena, se distingue por una señal arbitraria. Cada punta de la cadena termina en una empuñadura de hierro sujeta al eslabon contiguo.

7. Los fijos no son mas que piquetes de alambre de hierro, de cerca de medio metro, terminados en punta por uno de

sus extremos y en forma de anillo por el otro (fig. 4).

Es muy cómodo el número de 10 fijos porque sirve para advertir el agrimensor que ha medido una extension 10 veces mayor que su cadena, es decir, 100 metros (sobre 307 pies y 10 pulgadas.)

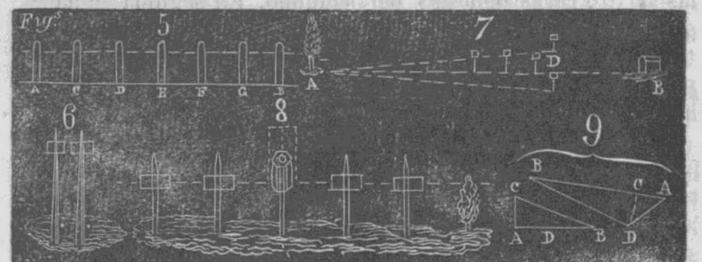
§. 3.° *Uso de los instrumentos de agrimensura.*

1. Los piquetes sirven para tirar una recta sobre el terreno.

Sirven tambien para marcar los ángulos y las irregularidades del terreno en que se debe operar.

2. Dásenos á trazar una línea que se estiende desde A á B (fig. 5). Si la distancia es corta, basta plantar dos piquetes, uno en el punto A y otro en el B; pero, si esta distancia es considerable, es menester entre estos fijar otros piquetes C, D, E, F, G. Para colocar estos piquetes en la direccion AB, se coloca uno á tres ó cuatro pasos del piquete A; se tira una visual, de suerte que este cubra al piquete B, y en seguida se colocan los otros intermediarios guardando siempre la línea recta. Si la operacion está bien hecha, todos los piquetes, cualquiera que sea su número, deben confundirse cuando se mira por una de sus extremidades.

Esta operacion se llama *alinear* ó *enfilar*.



3. Es importante que los piquetes estén colocados verticalmente.

Para asegurarse de su verticalidad, se emplea en tanto que se va adquiriendo el hábito, una plumada que se suspende de la extremidad superior del piquete. Conforme el hilo coincida ó no con el piquete (fig. 6), así este estará bien ó mal colocado.

4. Con frecuencia se encuentra en la direccion de la línea que se quiere trazar, un obstaculo ó un montecillo que impide ver un extremo de la línea desde el otro. En este caso se debe colocar sobre el montecillo mismo ú sobre un punto cualquiera de la línea, desde donde se divisen al través de las pínulas las dos extremidades.

Sea C este punto (fig. 7). Se coloca la escuadra en un punto D que se supone estar en la alineacion, se dirije una de las pínulas hácia A y se mira por la pínula opuesta para percibir el punto B.

Si B no enfila con D y A, se coloca la escuadra en otro punto E, y se repite la misma operacion hasta tanto que por medio de algunos tanteos se encuentra el punto C. Obtenido este punto se clava en él un piquete; se enfila con el punto F, y luego es muy fácil fijar los piquetes G, H, I, etc.

5. La manera de medir una distancia señalada ya con jalones, se reduce á tres cosas: 1.° á tener extendido por igual la cadena; 2.° á tenerla en nivel; 3.° á caminar en línea recta.

1.° El agrimensor toma una de las empuñaduras de la cadena y la coloca en el punto A (fig. 7); el *ayudante* ó *porta-cadena* toma en la mano izquierda 10 fijos y en la derecha la empuñadura de la cadena. El agrimensor ajusta la cadena al punto de partida, apoyándola segun los casos, en el palo de la escuadra, en un piquete ó en una de sus rodillas. El ayudante va andando hasta que encuentra resistencia y cuando la cadena está suficientemente tendida, clava un fijo lo mas verticalmente posible y continúa su camino sin volver la cabeza. Llega el agrimensor al fijo que ha dejado su ayudante, le sujeta verticalmente para descansar en él su empuñadura y la saca para continuar su camino. El porta-cadena fija sucesivamente el 3.° 4.° 5.° fijo, hasta que estén los 10, los cuales han ido pasando por manos del agrimensor, quien los devuelve luego á su ayudante, y escribe en su libro un *tiro*, es decir, una distancia de 100 metros.

2.° Cuando se mide un terreno inclinado, el ayudante debe levantar la mano en que tiene la cadena, al nivel del extremo opuesto y dejar caer verticalmente de esta misma mano un *fijo* para clavarlo en el lugar en que caiga. Si, por el contrario, el terreno viene cuesta arriba, el agrimensor es quien debe levantar la mano.

3.° Cuando la línea está trazada por los jalones, basta para seguirla, marchar por la alineacion, teniendo cuidado de pasar á algunos decímetros de los piquetes, para no tropezarles con la cadena. Pero cuando la línea no está marcada, el porta-cadena debe suponer en esta línea un punto lejano en la parte posterior que le sirva de direccion; sin lo cual el agrimensor, que le sigue y puede juzgar si su ayudante sigue ó no la línea, se veria obligado á llamarle á la derecha ó á la izquierda, en lo cual se perderia mucho tiempo.

6. La escuadra sirve principalmente para bajar ó levantar perpendiculares sobre una línea.

1.° Sea la línea trazada ABCD (fig. 8) y el punto E fuera de la línea, desde donde se ha de bajar la perpendicular; coloco la escuadra en el punto en que supongo que debe caer la línea, ajusto las pínulas *a* y *b* de modo que mirando por la abertura *a*, perciba CDH en la misma direccion, y mirando por la hendidura *b*, vea A y B confundirse en la línea visual. Esta operacion se llama poner *la escuadra en línea*. Supongámosla en *g*. Observo por la abertura *c* si enfilo con el piquete clavado en E; si todavía estoy distante, como lo muestra la figura, pongo la escuadra en *h*, donde bien pronto reconozco que he avanzado demasiado; entonces la fijo en F, donde me quedo, y la perpendicular buscada es E F.

2.° Nada mas fácil que levantar desde el punto F una perpendicular FE sobre el terreno. Se pone el instrumento en este punto, se enfilan y clavan los jalones marcando la línea FE mirando por la pínula *c*.

SEGUNDA SECCION.

PRACTICA DE LA AGRIMENSURA SOBRE EL PLANO HORIZONTAL.

1. Supongamos que se nos da á medir un terreno de forma triangular (fig. 9).

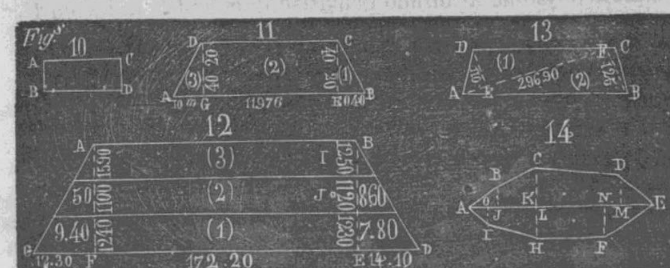
La superficie de un triángulo se mide multiplicando la base por la mitad de la altura, ó lo que es lo mismo, tomando la mitad del producto de la base por la altura. Señálase con jalones por medio de la escuadra la base AB del triángulo; mídase la lonjitud de esta base con la cadena y anótese el producto. Levantando en seguida con la escuadra la perpendicular CA ó CD que pasa por el vértice A ó D del triángulo, se mide esta perpendicular despues de marcada con los piquetes correspondientes, y la mitad del producto de las dos dimensiones expresa la superficie.

Sea AB=36,05ᵉ. y CA=20,50ᵉ. la tendrá de *superficie*

$$ABC = \frac{36{,}05^{e}.\times 20{,}50^{e}.}{2} = \frac{739{,}0250^{e}.}{2} = 369{,}5125^{e}.$$

Sea AB=37,25ᵉ. y CD=19,15ᵉ., se tendrá en *superficie* ABC=356,6687ᵉ.

2. Sea para medir un terreno de forma rectangular ABCD (fig. 10).



La superficie de un rectángulo se mide multiplicando la base por la altura.

Antes de proceder á la medicion, se principia por dar una vuelta alrededor del terreno para cerciorarse de su forma. Si los tres ángulos A, B, C son rectos, el 4.° D lo será tambien necesariamente, y no hay para qué medirlo con la escuadra. Se fijan desde luego piquetes en A, B, C y D; se pone la escuadra en A y se enfila con el piquete B; si la visual corta el piquete en C, el ángulo CAB es recto. Lo mismo se practica con B y con C. Terminadas estas operaciones, resta medir AB y BC.

Sea $AB=22,35^e.$ y $BC=44,70^e.$ se tendrá en *superficie* $ABCD=22,35^e.\times 44,70^e.=999,045^e.$ ó $1000^{e.c.}$; y como $576^{e.c.}$ valen 1 fanega, la superficie del rectángulo será por consiguiente, de 1,736 fanegas castellanas.

Supongamos que se haya de medir un terreno de la forma del trapecio ABCD. (fig. 11).

La superficie de un trapecio se mide multiplicando por la altura la semi-suma de sus lados paralelos.

Se toma el lado mayor A B por base de la operacion, se bajan á esta base desde los puntos D y C, las dos perpendiculares DG, CE y el trapecio se encuentra asi reducido á un rectángulo y dos triángulos.

Trátase ahora, pues, de medir los lados paralelos A B, C D y la altura C E=D G.

1.° Sea $CE=40,20^e.$ y $EB=11,40^e$; se tendrá la

$$\textit{superficie}\ BCE=\frac{40,20^e.\times 11,40^e.}{2}=229,140^e.$$

2.° Sea $GE=119,76^e.$; se tendrá en *superficie* $GECE=119,76^e\times 40,20^e=4824,352.$

3.° Sea $AG=119^e$; se tendrá en *superficie*

$$AGD=\frac{40,20^e.\times 10}{2}=201,000.$$

Luego la *superficie* ABCD iguala el total de estas tres sumas ó $5244,492^{e.c.}$, es decir, 9596 fanegas castellanas aproximadamente.

3. Si varios trapecios contiguos están separados por líneas cuyo paralelismo parece muy probable (fig. 12) se les puede medir por una sola operacion.

Se toma C D por base, y se bajan de los puntos A, B las perpendiculares AF, BE, las que cortarán los cuadriláteros en H, en G, en I y en J, habiéndose formado trapecios en las extremidades inferiores de los trapecios, y triángulos en las superiores del trapecio. La lonjitud FE, servirá para los tres rectángulos intermediarios. Se calcularán todas estas figuras, de la manera que acabamos de decir (n^{os}. 1, 2, 3,) y se obtendrá la superficie total de los trapecios contiguos.

4. Si el terreno tiene la forma de un cuadrilátero irregular, ABCD, (fig. 13) se tira la diagonal AC que se marca con piquetes y se mide; luego se levanta en E una perpendicular que pase por D; se busca tambien con la escuadra el punto F de la perpendicular que pasa por B; y se miden estas dos perpendiculares.

El cuadrilátero se encuentra asi reducido á dos triángulos, cuya valuacion superficial es fácil, pues puede hacerse por medio de una sola operacion multiplicando por la base AC la semi-suma de las dos alturas DE, BF.

Sea $DE=110^e.$; $BF=125^e.$ y la base $AC=296,90^e.$ se tendrá en *superficie*

$$ABCD.=\frac{110^e.+125^e.}{2}\times 296,90^e.=117,50^e.\times 296,90^e.=34885,75^e.$$

ó 62,56 fanegas castellanas.

§. II. *Medicion de los polígonos de mas de cuatro lados.*

1. La superficie de los polígonos se calcula reduciéndolos, como casi todas las superficies agrarias á triángulos, rectángulos ó trapecios. El cuidado del agrimensor debe ser, simplificar en cuanto le sea posible las operaciones, como asimismo tomar por base la recta mayor que se pueda tirar en el polígono y que por esta razon se llama *directiva*.

2. Désenos para medir el polígono irregular A B C D E F H I (fig. 14).

Se fijan piquetes en todos los vértices de los ángulos A, B, C, D, E, F, H, I; se tira la directiva A E; se levantan sobre esta diagonal perpendiculares que pasan por los vértices de los ángulos B, C, D, F, H, I; y se forman por este medio cuatro triángulos A B J, D E M, E N F, I O A, y cuatro trapecios B C K J, C D M K, F N L H, H L O I cuya superficie debe valuarse por medio de los datos siguientes:

Perpendiculares encima de la directiva.

B J=45,75e.; CK=54,25e.; D M=47,15e.

Perpendiculares por bajo de la directiva.

O I=46,35e.; L H=55,05e.; N F=51,45e.

Directiva superior.

A J=48,20e.; J K=56,65e.; K M=98,55e.; M E=46,95e.

Directiva inferior.

A O=24,70e.; O L=82,05e.; L N=70,85e.; N E=68,75e.

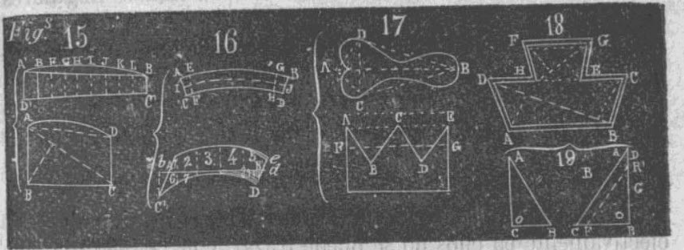
Luego, si *para cada triángulo* es necesario multiplicar la base por la semi-altura, y *para cada trapecio* la semi-suma de las dos bases paralelas por la altura; se puede, pues, en lugar de tomar la mitad de cada producto, sumar todos los productos y tomar la mitad de esta suma.

Triángulo ABJ=	48,20e.×45,75e.	= 2204,75	e.
trapecio BCKJ=	(45,75e.+54,25e.)56,67e.	= 5721,65	»
trapecio CDMK=	(54,25e.+47,15e.)98,85e.	=10091,52	»
triángulo DEM=	46,95e.×47,15e.	= 2213,8925	»
triángulo ENF=	68,75e.×51,45e.	= 3537,1875	»
trapecio FNLH=	(51,45e.+55,05e.)70,55e.	= 7545,525	»
trapecio HLOI=	(55,05e.+46,35e.)82,05e.	= 8319,87	»
triángulo IOA=	46,35e.×24,70e.	= 1144,845	»
	Total.	40779,2400	e.
	Mitad.	20389,62	»

La superficie total del polígono es pues de 20389,62 e.c. ó 35,39 fanegas castellanas,

3. Un terreno poligonal puede presentar líneas curvas. Pero una curva debe considerarse como un conjunto indefinido de líneas rectas; luego cuantas mas perpendiculares se bajen sobre la directiva, tanto mas se aproximará el resultado á la verdad. Asi la figura 15 se descompondria en 9 trapecios, cuyos lados AE, EF, FG, etc. pudieran ser considerados sin error sensible como otras tantas líneas rectas.

Si el terreno es muy extenso, para evitar la multiplicidad de subdivisiones, se tira con piquetes una línea recta de un punto de la curva á otro, y se forma por este medio un cuadrilátero rectilíneo A' B' C' D' (fig. 15) el cual se calcula



segun las reglas dadas, y una figura curva que se valúa segun el procedimiento precedente.

4. Cuando un polígono tiene dos líneas curvas opuestas AB, CD, (fig. 16) que siguen casi una misma direccion, se obtiene su superficie multiplicando la longitud del medio por la semi-suma de las lonjitudes EF, GH, tomadas en las extremidades.

La longitud del medio I J compensa lo que la línea CD tiene de menos y lo que la línea AB tiene de mas; de suerte que la figura queda reducida á un trapecio cuyas líneas EF, GH son los lados paralelos, y la línea I J la altura.

Si el terreno tiene mucha extension (fig. 16 *bis*) se tira la base b A' B' D, se bajan en seguida perpendiculares para obtener trapecios y triángulos, y se obtendrá su superficie, si despues de haber calculado cada figura, se escluyen los triángulos A'b C' y B' *de*.

5. Para medir un terreno de forma sinuosa continua (figura 17) se puede calcular su superficie por la trasformacion de esta figura en un polígono de una extension semejante. Es menester plantar piquetes en los puntos A, B, C, D, y tra-

zar el polígono, tratando de *regularizar* los límites del terreno y compensar las porciones que deben sustraerse por las que se añadan: operacion fácil, y que, con algun hábito, se puede ejecutar á simple vista. No obstante, para no cometer errores, será conveniente medir separadamente las porciones de terreno que se añadan y las que se sustraigan.

Tendria que operarse de la misma manera si se hubiesen de convertir en regulares y rectos los límites angulares A, B, C, D, E de un campo (fig. 17 *bis*). Despues de medidas las porciones de terreno que deben añadirse ó quitarse, se traza la línea de separacion F. G.

§. III. *De algunas dificultades que suelen encontrarse en la práctica.*

1. La medicion de los cercados ofrece dos dificultades: efectivamente en ellos no se puede trazar con facilidad la directiva, ni es fácil ejecutarla en el terreno inmediato.

En cuanto á la directiva, debe ser tirada por dos personas, de las cuales una busca por medio de la escuadra un punto de la línea correspondiente á cada uno de los puntos extremos desde el cual tira una visual, mientras que la otra la señala con uno ó muchos piquetes.

Para evitar la entrada en otra propiedad, se miden los cuadriláteros por la diagonal.

Supongamos que se nos da á medir el terreno ABCEGFHD (fig. 18).

Se divide este terreno en dos cuadriláteros ABCD, HEGF; pero, si se adoptase AB por base á fin de bajar á ella las perpendiculares desde los puntos C y D, seria necesario salir hácia A y hácia B. Es preciso, pues, en cada cuadrilátero formar por medio de las diagonales BD y HG dos triángulos que se calculan segun el método ordinario.

Si el muro de cerca no es medianero ó divisorio es necesario comprenderlo todo en la superficie; si lo es, se toma la mitad de su espesor.

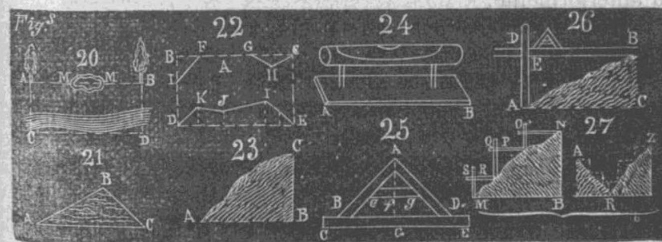
2. Dásenos á medir la distancia de dos puntos B, A (figura 19) de los cuales solo uno es accesible á causa del rio

RR'. Es menester, ademas de la escuadra de medicion, tener una escuadra de dibujar cuya base y altura sean de igual dimension.

Se coloca la escuadra de agrimensor en el punto B, se tira una recta desde B á A, despues otra línea recta desde B á C, perpendicular á la línea AB, y se señala con jalones bastante próximos. Entonces se anda hácia atrás á lo largo de BC con la escuadra de dibujar en las manos colocada horizontalmente á la altura del ojo, y la base B' C' vuelta al lado opuesto del rio. Se mira por el ángulo C de esta escuadra hasta que se perciben á la vez los puntos A, B en la direccion de las líneas CA, CB; en fin se planta un piquete en el punto C, y se mide la línea CB cuya longitud es igual á la de la línea AB.

Para medir el ancho D G del rio se emplea el mismo medio. Pero si el punto F, por ejemplo, fuese el punto de estacion, es decir, el punto desde donde el ojo aplicado á la escuadra de dibujar pudiese descubrir á la vez los puntos D y B, seria necesario descontar la longitud BG de la línea BD y la diferencia GD daria lo ancho del rio.

3. Sea para medir la distancia de los dos puntos A, B, (fig. 20) inaccesibles ó por el pantano M M' ó por el rio R R' que separa al agrimensor de la línea AB.



Se tira con la escuadra la línea recta CD; desde los puntos C y D se levantan dos perpendiculares, la una hácia A, la otra hácia B, y se mide la línea CD. Su longitud será precisamente igual á la distancia del punto A al punto B. Sea para medir el terreno triangular ABC (fig. 21) en donde cualquier obstáculo impide bajar la perpendicular.

1.° Se suman las longitudes de los 3 lados; 2.° se toma la mitad; 3.° se extraen sucesivamente de esta semi-suma las longitudes de los 3 lados; 4.° se multiplican entre sí las 3 restas; 5.° se multiplica el producto por la semi-suma de los tres lados; y 6.° se extrae la raiz cuadrada del resultado.

Sea AB=23,15^{e}; AC=45,35^{e}.; y BC=38,64^{e}.

He aquí el detalle de la operacion:

1.° 23,15.+45,35^{e}.+38,64^{e}.=107,14.^{e}

2.° $\dfrac{107,14.}{2}$=53,57^{e}.

3.° 30,42^{e}.;—8,22^{e}.;—14,93^{e}.

4.° 30,42^{e}×8,22^{e}.×14,93^{e}.=3733.282332^{e}.

5.° 3733,282332^{e}.×53,57^{e}.=199991,93452524.^{e}.

6.° La raiz cuadrada de 199991, 93452524^{e}. = 447,2045^{e}.^{e}.

La superficie del triángulo es pues de 447,2045^{e}.^{e}.

4. Praderas. La medicion de las praderas no tiene otra dificultad que la de estar comunmente limitadas por un rio que serpentea, ó por sotos ó por zanjas.

Si la pradera está limitada por curvas, se sigue lo dicho ya anteriormente.

Si está limitada por sotos ó zanjas se practica lo dicho respecto á los cercados.

Si está atravesado por un rio ó riachuelo que no se pueda vadear, se descompone el terreno en dos porciones que se miden separadamente.

Caminos. En muchos parajes, cuando un camino atraviesa una pieza de tierra, hace parte de ella y debe ser comprendido en su medicion. En otros paises los caminos pertenecen al dominio público.

5. Cuando se quiere medir la superficie de un terreno en donde no se puede penetrar, tal como un bosque, pantano, etc., es necesario comprenderla y limitarla en figura geométrica, cuya superficie se pueda hallar fácilmente, como un cuadrado, un rectángulo ó un cuadrilátero irregular. Se sustraen de la superficie total de esta figura las partes del terreno que se han añadido, y el residuo expresa la superficie que se busca.

Supongamos que tenemos que medir un bosque ó un pantano A (fig. 22).

Se colocan piquetes en el vértice de cada uno de los ángulos del bosque ó pantano en F, G, H, C, E, I, J, K, D, L,; se tiran las dos rectas C B, C E; y se tiene de esta manera un rectángulo que circuye perfectamente el bosque ó pantano A. Se mide la base y la altura de este cuadrilátero para obtener su superficie; se miden en seguida todos los triángulos y los trapecios que están *fuera* de los límites del bosque ó pantano: se calcula la superficie de cada uno en particular y se suman, restando del valor total del rectángulo el de las figuras *excedentes*; la diferencia ó resta expresará la superficie del bosque ó pantano A.

TERCERA SECCION.

PRACTICA DE LA MEDICION DE UN SUELO INCLINADO.

§. I. *De los diferentes métodos de medicion empleados para un plano inclinado.*

1. Para medir el suelo inclinado se emplean dos métodos, el *metodo de desarrollo* y el *método de cultelacion.*

2. El método de desarrollo consiste en medir la superficie, tal como se presenta, sin atender á su inclinacion. Se siguen en este caso las reglas ordinarias, y si el terreno es inaccesible, se emplean líneas auxiliares por su perímetro. Debe solamente notarse que, para marcar con piquetes una directiva, es necesario, si está inclinada, multiplicar los piquetes en razon de su pendiente, pues sin esta precaucion podria suceder que á pocos pasos de descenso se perdiese de vista el piquete.

3. Un plano horizontal da una superficie menor que un plano inclinado. La superficie horizontal se llama *base productiva.*

4. La superficie inclinada se llama *base de desarrollo*; pero como se ha reconocido por experiencia que los planos inclinados no conservan la humedad, que las lluvias los deterioran, y que su cultivo es penoso, se ha convenido en no medir mas que la base productiva.

5. Se llama *método de cultelacion* el procedimiento por el cual se refiere un terreno inclinado á su base productiva.

Este método se llama así, porque consiste en reducir á porciones horizontales la pendiente del terreno inclinado.

6. Para practicar la cultelacion es necesario conocer la *nivelacion*.

§. II. *De la nivelacion.*

1. *Nivelar ó hacer una nivelacion* es determinar la altura comparativa de muchos puntos de un terreno.

Se llama *línea de nivel* la horizontal sobre que se encuentran dos puntos. La *diferencia de nivel* es la diferencia que hay entre la altura del uno y la del otro.

2. Se llama *talud* la línea inclinada CA (figura 23) que parte de la vertical BC para unirse á la horizontal AB. Cuando los taludes tocan al suelo natural toman tambien el nombre de ramplas.

3. Cuando se nivela un terreno inclinado, hay que considerar tres líneas: 1.° la *horizontal*, que fija el nivel; 2.° la *vertical*, que indica la altura buscada entre dos puntos; 3.° el *talud*.

Estas tres líneas tomadas colectivamente, determinan sobre el terreno un sólido, cuyo *corte* ó *perfil* se presenta bajo la forma de un triángulo que tiene por base la 1.ª, por altura la 2.ª, y por hipotenusa la 3.ª

4. La nivelacion se emplea en tres casos: 1.° en la construccion de caminos, en la conduccion y direccion de agua, en el desagüe de pantanos; 2.° en la suputacion cúbica de los trabajos de terraplen; 3.° en el método de cultelacion.

5. Para nivelar dos puntos próximos nos servimos de dos especies de nivel; el *nivel de aire* y el *nivel de plomada ó de albañil*.

El nivel de aire es muy sensible. Está formado de un tubo de cristal colocado sobre un plano AB (fig. 24) que le permite adaptarse sobre una regla. Cuando la burbuja de aire que se halla en el líquido del tubo, se detiene en medio de dos puntos marcados, es una prueba de que están á nivel.

Se suple este nivel por el de albañil.

Este nivel se compone de dos regletas iguales AB, AD (fig. 25) unidas en A por una muesca, en *c* y en *e* por una traviesa. En el medio de la traviesa hay una raya *f* por donde debe pasar la plomada cuando el nivel esté exacto.

Con este nivel se hace uso de dos reglas de longitud de 2 ó 4 metros, de 1 ó 2 toesas. Estas reglas deben estar divididas en pies, pulgadas, etc. cuando se mide por toesas, en decímetros y centímetros cuando se mide por metros.

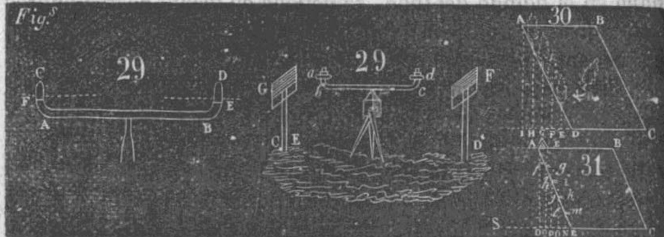
6. Para hallar con el nivel de albañil la altura comparativa de dos puntos próximos A B (fig. 26) el agrimensor coloca horizontalmente la regla D B; mientras que su ayudante va á colocar en A la vertical AD. Hecho esto, se pone el nivel sobre la regla DB, que se baja ó levanta sucesivamente hasta que el nivel esté exacto; la medida hallada EA es la altura buscada.

7. Si la nivelacion no puede ejecutarse de una vez (figura 27) se mide primero OP, luego QR, despues SM, se suman las tres mediciones obtenidas; y la suma de estas tres verticales es igual á la línea NB como la suma de las tres horizontales SR, QP, ON es igual á la base MB.

Si se quiere obtener la diferencia de nivel entre dos puntos A, Z y un tercero R (fig. 27) se suman las extensiones verticales que se hallan descendiendo de A á R, y las que se hallan subiendo de R á Z; se resta en seguida la suma menor de la mayor y el resíduo es la diferencia buscada.

Para nivelar dos puntos muy distantes se emplea el *nivel de agua*.

El nivel de agua se compone de un tubo AB de hoja lata (fig. 28) soldado por sus dos extremos, en los que están perfertamente ajustados dos cilindros de cristal C, D; se sostiene el tubo horizontalmente sobre un pie en P; se vierte agua colorada en uno de los cilindros y hay nivel cuando se eleva á la mis a altura en los dos.



Con el nivel de agua nos valemos de una escala y un índice. La escala es una regla de 3 á 4 metros de altura dividida en metros, decímetros y centímetros. El índice es una segunda regla que resbala á lo largo de la escala y que indica la diferencia de nivel en metros, decímetros y centímetros.

Para hallar con el nivel de agua la diferencia de altura de los puntos C y D (fig. 29) se fijan en estos puntos dos piquetes, mitad blancos, mitad negros, divididos en porciones métricas; despues se coloca el instrumento en un punto, desde donde se puedan ver los dos piquetes F y G. El agrimensor envia al punto C á su ayudante que levanta o baja segun la señal, la extremidad superior movible del piquete, mientras que él enfila su nivel. Si, fijo el ojo en él divisa el punto de índice del piquete, es decir, la línea formada por la separacion de los dos colores, hace señal á su ayudante para que tenga inmóvil la parte superior del piquete; el ayudante anota entonces los metros y las partes de metro sobre el piquete, contando desde el suelo hasta el punto de índice. Para saber la diferencia de altura entre D y C es necesario deducir la altura del piquete FD, y se tiene en EC la diferencia buscada.

Si el terreno es muy desigual, es necesario cambiar muchas veces de plano, que es lo que se llama *una alineacion parcial*; los puntos donde verifica las operaciones el agri-

mensor, se llaman estaciones. La suma de las alturas parciales obtenidas así dan la altura total buscada.

Se llaman punto de *señal* los que se anotan dos veces en la operacion.

§. III. *Método de cultelacion.*

1. La base productiva que se llama tambien *proyeccion horizontal* es el plano de nivel supuesto debajo de la pendiente del terreno inclinado. La superficie, que corresponde á plomo debajo de la superficie real, es pues la proyeccion horizontal.

Así la proyeccion horizontal de un terreno inclinado no es otra cosa que la figura IAD (fig. 30) que se podria trazar, si de todos los ángulos de este terreno se hiciese bajar una plomada sobre una superficie nivelada ID.

2. La *base productiva* se llama así, porque está admitido como principio de economía rural que un campo inclinado produce en razon, no de su extension rural, sino de su proyeccion horizontal. En efecto, si este campo producia en razon de su superficie, no podria esto suceder sino en el caso de que los vegetales crecieran perpendicularmente á esta superficie, tal como el árbol K (fig. 30), lo cual no es así; porque la experiencia demuestra que crecen verticalmente como los árboles L, M, N, O, que, colocados á lo largo de la línea DA, ocupan toda la proyeccion horizontal de esta línea.

3. Si el terreno que se quiere reducir á su base productiva es de inclinacion suave, se mide con la cadena, como ya se dijo anteriormente.

Si la inclinacion del terreno es rápida, en vez de cadena, se emplea una regla de 5 á 6 metros (fig. 31) provisto de una plomada. Se le traslada sucesivamente de A á E, de *f* á *g*, de *h* á *i*, de *j* á *k*, etc. Se vé que la extension AE=RQ,=*fg* =QP', *hi*=PO, *jk*=ON, *lm*=NE; luego la suma de las porciones horizontales que se obtiene midiendo una línea inclinada, es absolutamente la misma que se obtendría si se midiese horizontalmente y de una sola vez esta línea inclinada; en otros términos, igual á la de la proyeccion horizontal.

4. Si la pendiente es suave, debe emplearse el método de desarrollo, porque entonces el error es casi nulo; en caso contrario el método de cultelacion merece la preferencia.

CUARTA SECCION.

DIVISION DEL TERRENO HORIZONTAL INCLINADO.

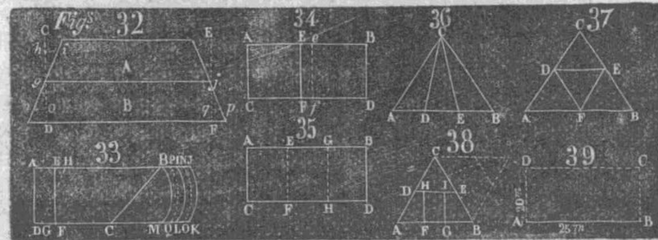
§. I. *De la restitucion de terrenos.*

1. El arte del agrimensor no se limita á buscar la superficie de un terreno; es necesario tambien que tenga medios: 1.° para determinar exactamente lo que en él se halla, sea de mas ó de menos, relativamente á los títulos; 2.° para dividir la propiedad en las proporciones que aquellos indiquen.

2. Cuando de dos terrenos contiguos el uno tiene mas y el otro menos de lo que les corresponde, y el agrimensor es llamado para restituirlos á su capacidad legal, debe: 1.° examinar los títulos de cada propietario; 2.° medir los campos en masa en la direccion comun á todas las piezas, á menos que la línea divisoria no esté fijada por setos ó algun foso, y 3.° medir cada campo en particular.

Pues la medicion en masa da mas exactamente la superficie total que la suma de las piezas medidas en particular, porque el cálculo es tanto mas exacto en general cuanto menos se repiten las operaciones. La diferencia de los dos resultados debe ser repartido proporcionalmente á cada pieza.

3. 1.° Para restituir un terreno, partiendo de una base encontrada por las oblícuas que forman en sus extremidades ángulos agudos, se divide el número de metros que han de tomarse de una superficie por la longitud de esta superficie; pero como esta operacion supone un rectángulo, se tendria de menos la suma de los pequeños triángulos exteriores *ghi klj* (fig. 32). Es necesario, pues, dividir la suma de estos triángulos por la longitud de la superficie, disminuidas las bases *hi*, *kl*.



2.° Si las oblícuas forman ángulos obtusos (fig. 32) como sucede en la superficie B, es evidente que debe operarse de una manera inversa, pues los pequeños triángulos son interiores.

4. 1.° Para restituir un terreno sobre un cuadrilátero rectilíneo en que una de las extremidades es mas larga que la otra, se divide el número de metros que hay que tomar por un lado ACD, del trapecio ABCD (fig. 33). Supongamos que nos resulte 1,50 est. por cociente; si se saca 1,50 est. de DF para añadirlo á AE, se tendrá una cantidad igual al rectángulo, y la línea opuesta á la base, seguirá la oblicuidad necesaria.

2.° En un cuadrilátero curvilíneo la curva JK (fig. 33) puede ser considerada como la base de un rectángulo, luego dividiendo por JK la cantidad del terreno que se ha de restituir, se tendrá por cociente la anchura IN, LO, IP, LQ.

Si las extremidades BJ, MK son oblícuas suficientemente pronunciadas se las toma en consideracion como hemos dicho.

§. II. *De la particion de propiedades.*

1. La particion de las propiedades es por lo comun necesaria por efecto de una herencia ó por venta.

Esta particion es generalmente difícil. No basta en efecto, dividir la propiedad en porciones de una extension perfectamente igual, sino que es tambien necesario atender á la calidad del terreno. Hay fanega de terreno que vale por 2 y

3 de inferior calidad. La operacion de la particion exije, pues, mucha habilidad unida á una acrisolada buena fé.

2. La geometría nos ofrece un gran número de construcciones propias para la particion de propiedades; la aritmética nos proporciona el medio mas fácil, una simple division. En la práctica se combinan estos dos medios que se auxilian mútuamente.

3. 1.° Para dividir en dos partes iguales un campo de forma rectangular, se comienza por señalar con jalones una linea en la direccion FE (fig. 34) que divida lo mejor posible este campo en dos partes iguales. Se mide separadamente cada una de estas dos mitades; se suman sus dos superficies y se toma la mitad, la cual será la capacidad de cada una de las dos partes del campo.

Si la línea FE no llena esta condicion se mide su longitud; se divide por el valor lineal de FE el número de varas cuadradas que deben añadirse á la mitad menor, y el cociente dará la distancia lineal á que debe colocarse la línea de particion.

Si la porcion B D F E contiene, por ejemplo, 50 varas cuadradas de mas, á la porcion ACFE deben restituirse 25. Pero supongamos FE=20 varas; dividiendo 25 por 20 de longitud tenemos por cociente 1,25 varas; es decir, que la línea de particion FE debe aproximarse hácia CD de 1,25 varas en *ef*.

2.° Si el rectángulo ABCD (fig. 35) debe ser dividido en 3 partes iguales, se trazan aproximativamente con jalones las líneas FE, GH que deben limitar las 3 partes de la pieza. Se mide separadamente cada una de estas 3 partes, se suman sus superficies y se toma el tercio, que deberá ser el contenido de cada parte.

Si una de ellas AEFC, por ejemplo, es menor de 40 varas cuadradas, se mide la longitud de la línea FE=20 varas; se dividen las 40 varas cuadradas por 20, y se tiene 2 por cociente; es decir, que debe retrocederse 2 varas hácia HG la línea de particion FE. Se procede de la misma manera en la segunda porcion EGHF; en fin la tercera GBDH tendrá su

medida exacta si la operacion ha sido bien hecha.

De la misma manera se operaría si el campo debiese dividirse en mayor número de partes.

4. 1.° Para dividir en tres partes iguales un campo de forma triangular dispuesto de tal suerte que cada partícipe quiera gozar de su pozo ó de una salida á uno de los vértices, basta dividir la base AB (fig. 36) en tres partes iguales y tirar rectas desde el vértice á todos los puntos de division.

Si el triángulo debe ser dividido en cuatro partes iguales, se toma un punto C (fig. 37) en la mitad del lado AB; otro punto en D, en la mitad del lado AF; despues otro punto en E, en la mitad nel lado FB; se unen DE, DC, CE, y se obtienen las cuatro partes equivalentes.

Otro procedimiento. Se toma un punto D, en la mitad de AC (fig. 38), se tira DE, paralela á AB; se dividen las líneas AB, DE en tres partes iguales, se unen los puntos de division por medio de las rectas FH, GI y el triángulo resulta dividido en cuatro partes equivalentes.

2.° Por la figura 38 se ve tambien la manera como puede dividirse un paralelógramo en 8 partes iguales.

3.° Finalmente podrémos siempre, como lo indica el trapecio ADEB, dividir un trapecio en un número cualquiera de partes, siendo para ello suficiente tener en cada base del trapecio un número de partes iguales.

5. Conocida la superficie de un terreno para darle la forma de un cuadrilongo, ó para convertir un terreno de forma irregular en un rectángulo de superficie equivalente, se mide la longitud de uno de sus lados, que será la destinada á uno de los del cuadrilongo y se divide esta longitud por el número de estadales cuadrados que deba contener la figura: el cociente será el número de metros que debe darse á la altura del rectángulo pedido.

Supongamos que se ha de trazar una pieza de terreno rectangular que contenga 500 estadales cuadrados de superficie y cuya base sea la línea AB (fig. 39). Supongamos AB =25 estadales; dividiendo 500 estadales cuadrados por 25 estadales, obtendremos por cociente 20, que será la altura que deben tener los lados AD y BC. Tirando entonces las dos líneas paralelas AD, BC, de una longitud de 20 estadales, perpendiculares á la AB, y paralela á esta la DC, obtendremos el rectángulo pedido ABCD, cuya superficie es 500 estadales cuadrados.

6. Para dividir entre varios herederos y en partes iguales un campo de forma poligonal irregular, se mide la totalidad del terreno en estadales cuadrados, se divide el número obtenido en varias porciones iguales, como en 2 mitades, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos, 8 octavos, etc., segun el número de partícipes, y la extension de la porcion que debe tocar á cada uno; ó lo que es lo mismo, se hace la division por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. partes, segun las circunstancias, y se obtiene así el número de estadales cuadrados que cada heredero puede reclamar como su herencia. Hecho esto, se buscan y trazan sobre el terreno los límites de cada superficie parcial, dándoles en cuanto sea posible la figura de un cuadrado, un rectángulo, ó un trapecio, elijiendo, si el terreno lo permite, la figura que mejor convenga á los copartícipes.

Supóngase que tenga que dividirse entre tres personas un campo cuya extension superficial sea 10,000 estadales cuadrados, de manera que el primero tenga la mitad del todo; el segundo, la tercera parte; y el tercero la sexta. El 1.° tendrá, pues, los $^6/_{12}$ del todo, es decir, 500 estadales cuadrados; el 2.° $^4/_{12}$, es decir, 3,333 estadales cuadrados y el 3.° $^2/_{12}$, es decir, 1,667 estadales cuadrados. Estas diversas superficies se convierten en rectángulos equivalentee segun e1 método indicado.

SEGUNDA PARTE.

Levantamiento de planos y modo de darles la aguada.

PRIMERA SECCION.

LEVANTAMIENTO DE PLANOS.

§. I.—*Definiciones.—Escala.*

Levantar un plano es trazar sobre un papel la forma de un terreno con todos sus detalles, en dimensiones reducidas que conserven la proporcionalidad de sus lados y la igualdad de sus angulos.

Aunque el arte de levantar planos difiera de el del agrimensor, ambos se prestan mútuo auxilio.

La *escala simple de proporcion* es una línea que representa la longitud que debe ocupar en un plano, tal ó cual número de estadales en el terreno, sirviendo para poner todos los lados del plano en proporcion.

(*Véase dibujo lineal pág.* 86 *fig.* 1.)

Si la escala AB representa diez estadales, Ao ó Ac representará 1 estadal; el *Ai* ó *Ad*, 2 estadales; A 2 ó Ac, 3 estadales etc. Si necesitásemos, pues, representar una longitud de 7 estadales $^1/_{22}$ colocaríamos una punta del compás sobre la cifra 7, abriéndole hasta que la otra punta llegase á la mitad de *Ao ó Ac*.—Si una línea del plano fuese mayor que la escala, se coloca una abertura de compás igual á AB, sobre la línea del plano cuantas veces sea posible, y si queda alguna resta, se gradua en estadales y por medio de la escala.

El tamaño de una escala sencilla es arbitrario, y se le hace depender generalmente del plano. Sin embargo las escalas de- cimales ó de 10, 100 etc., partes son de un uso mas fácil que las arbitrarias.

Llámase escala de *décimas*, la que nos da las décimas de una medida cualquiera.—El dibujo lineal nos dió su trazado pág. 86 fig. 1.—Veamos ahora su construccion.

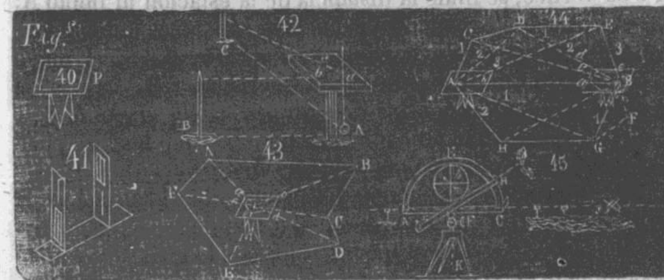
Sobre una línea indefinida CA se colocan varias aberturas de compás arbitrarias, de las cuales, cada una CD, DF, FH, etc. representan 100 partes. En los puntos C, D, F, H, etc., se levantan las perpendiculares CA, DB, FE, HG, etc., sobre cada una de las cuales se colocan 10 aberturas iguales de compás, pero arbitrarias. Se tira entonces ABG: se divide CD y se colocan las 10 partes sobre AB, se tiran en seguida trasversales y de este modo queda dividida CD en 100 partes. Finalmente por los puntos de division correspondientes de CA, DB, DE, se tiran líneas rectas que son otras tantas paralelas á CD.

Sea CD=100 estadales, tendremos tambien DF ó FH=100 estadales.

Para 100 estadales se tomará, pues, con el compás de F á D;
Para 105 estadales. . . . . de *l* á *n*
Para 94 estadales. . . . . de *o* á 4
Para 47 estadales. . . . . de *p* á 7

§. II.—*Del levantamiento de planos por la plancheta.*

1. La *plancheta* es una tablita en forma de rectángulo que se coloca sobre un palo ó trípode que gira sobre sí, á fin de que pueda colocarse en una posicion horizontal.—Una bolita que se coloca sobre la tablita, y rueda hácia el lado en que se halla la pendiente, indica que debe levantarse de este lado. Unos tornillos de presion detienen este movimiento cuando ha llegado á obtenerse la horizontabilidad. (fig. 40.) Una hoja de papel está estendida y encolada por los lados con goma.



Se emplea tambien una *alidada* (fig. 41.) Consiste en una regla de cobre á cuyos extremos se hallan ajustadas con unos goznes dos láminas metálicas que pueden levantarse perpendicularmente y detenerse en esta posicion. Estas láminas tienen dos hendiduras ó pínulas y ventanas mas anchas, en las cuales está estendido un pelo ó cerda vertical. Mirando por estas hendiduras pueden dirigirse los rayos visuales hácia los puntos del terreno. De lo que resulta, que el plano de un terreno levantado con la plancheta, está siempre representado por el método de cultelacion, puesto que este procedimiento busca siempre la proyeccion horizontal.

2. Para medir con la plancheta sobre un terreno el ángulo CAB (fig. 42), se coloca desde luego en A el instrumento en una posicion horizontal, se clava en seguida una aguja en el punto *a* que corresponde verticalmente al punto del terreno; se tira la línea *ac* por medio de la alidada aplicada contra la aguja y alineada sobre C; luego, sin separar el instrumento, se apoya de nuevo la alidada contra la aguja, dirigiéndola hácia B, para tirar la línea *ab*, obteniendo así el ángulo *cab*, cuya medida nos dará á conocer el semicírculo graduado.

3. Para medir con la plancheta un terreno poligonal ABCDEF (fig. 43) en el que nos hallemos colocados, marcaremos desde luego sobre el papel un punto *i* para representar allí el lugar de estacion, donde se clava una aguja, como en el ejemplo anterior; se dirige en seguida la alidada hácia el punto A; se traza á lo largo del borde de la regla la línea *ia*A que

va á su vértice; se mide la distancia de la estacion al punto A; y se coloca sobre el papel la distancia *ia* con tantas unidades de la escala como estadales contiene *i* A: *a* será, pues, el plano de A.—Se tirarán del mismo modo las rectas *ib*B, *ic*C; y se medirán las longitudes *i* B, *i* C... para hallar los planos *b*, *c*,... de B, C... Finalmente uniendo estos diversos puntos, el polígono *abcdef* será el plano del polígono ABCDEF.

Se comprueba el polígono del plano, colocando sobre la escala una abertura de compás igual á uno de sus lados, y midiendo sobre el terreno el mismo lado; con lo cual se viene en conocimiento de la identidad del resultado. Hecha esta prueba, se trazan en el interior del plano los accidentes que se encuentren en el terreno, como los edificios, caminos, arroyos, etc.

4. Si uno no pudiese colocarse en un punto del terreno, se coloca desde luego la plancheta en A (fig. 43) y se describe el ángulo BAF; se mide en seguida el lado AF, cuya distancia tomada en la escala se traslada al plano donde queda representada por *af*. Despues de haber colocado bien horizontalmente la plancheta en el punto F, se mide el ángulo AFE, y se traza la línea *fe*, sobre la cual se coloca una abertura de compás tomada sobre la escala igual á la distancia FE. En el punto E, se repite la operacion hecha en A y en F. Finalmente llegando al punto B, es preciso que enfilada la aliada con A, la línea tirada desde el punto *b* venga á unirse exactamente á la línea en que se encuentra el punto de partida *a*. Si se consigue, se dice que se ha *cerrado el polígono*.

5. Para cerrar exactamente un polígono, uso bastante raro y siempre difícil, es necesario; 1.º que la plancheta esté perfectamente horizontal en cada estacion; 2.º que las medidas se tomen con mucho cuidado; 3.º que la alidada esté bien dirigida sobre la alineacion; 4.º que las distancias tomadas sobre la escala correspondan sin error á las del terreno.

6. El *método de interseccion* consiste en establecer sobre el terreno una base, para obtener por medio de triángulos diversos puntos que sirven para la construccion del plano.

Se fija la plancheta en uno de los vértices A del polígono ACDEBFGH (fig. 44;) se trazan sobre el papel las direcciones AC, AD.. que van al vértice, y se anotan estas líneas con

los números 1, 2, 3... yendo de izquierda á derecha tanto de un lado como de otro de la base *Ab*. Se mide la distancia de la estacion A con el punto B, y se coloca sobre la línea *Ab* una longitud igual en partes de la escala á esta distancia: *b* representará la estacion B.—Se traslada uno á este punto B, y desde esta estacion se tiran visuales al punto A con la alidada, que trazará la recta AB.—Estando el instrumento horizontalmente fijo sobre su pié, se clava una aguja en el punto *b* que está verticalmente encima de B.—Finalmente tirando visuales desde el punto B, á los diversos vértices C, D..... se trazan en el papel rectas tendentes á estos puntos y se marcan estas líneas con los números 1, 2, 3... yendo siempre de izquierda á derecha de los dos lados de AB.—Las líneas indefinidas de los mismos números que se habrán trazado, tanto en la estacion A como en la B, se cortarán dos á dos y cada punto de interseccion determinará el vértice *e*, *d*,... Así el plano del polígono levantado será *acedbfgh*.

Si algun punto F invisible de A no ha podido determinarse con este procedimiento, se va á estacionar en un lugar G, ya determinado sobre el plano, y podremos trazar una línea *gf* que contenga este punto; por otra parte se ejecuta en los puntos B y *b* como si B*b* fuese una base medida.

El método de interseccion presenta la doble ventaja de no tener que medir mas que una línea, y que el plano se encuentra todo trazado, aun suponiendo que el terreno sea horizontal, porque las pínulas dan por medio de radios prolongados ó subidos, los diversos puntos del terreno, hallándose todas estas líneas reducidas á la horizontal.

§. III.—*Del levantamiento de planos con el grafómetro.*

1. El *grafómetro* es un instrumento destinado á medir los ángulos que forman las líneas ó visuales que desde el ojo del observador van á las diferentes señales que se pueden ver en un terreno. Consiste en un semicírculo de cobre ABC (fig. 45) cuyo limbo está dividido en 180º, y cortado por un diámetro AEC que forma cuerpo con el instrumento; pero el diámetro

CH solo está sujeto á el por el centro E, y se mueve para recorrer la semicircunferencia desde 0° á 180° El primero se llama *alidada inmóvil*, el 2.° *alidada móvil*. Las dos alidadas están terminadas por dos pínulas verticales para mirar los jalones. La alidada móvil está provista en uno de sus extremos de un vernier, que da las fracciones de los grados. Este *vernier* (1) consiste en un arco de cobre concéntrico á la semi-circunferencia, y cuya division difiere del limbo; puesto que señala 30'; por manera que la comparacion de estas dos divisiones permite añadir á los grados marcados sobre el limbo los minutos que da el vernier. Entre el limbo y la alidada inmóvil hay una pequeña brújula *b* que sirve para orientar el plano, esto es, para reconocer la posicion del plano con relacion al meridiano; es una línea dirigida de *norte* á *sur*: una perpendicular á ella da los otros dos puntos cardinales, *este* y *oeste*. Finalmente, para que el instrumento tome las diversas inclinaciones necesarias para ponerse de nivel, está montado sobre una bola F, llamada *rodilla*, que se adapta á una especie de concha que se cierra á voluntad por medio de un tornillo.

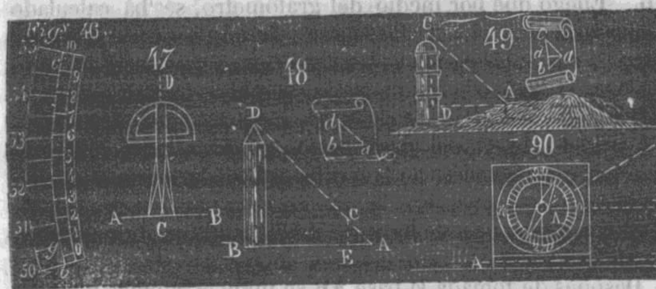
2. Para comprobar el grafómetro, se traza un triángulo sobre el terreno, y se miden sus ángulos separadamente. Si su suma llega á 190°, ó hay una muy ligera diferencia, es prueba de que el instrumento es bueno. Se pueden tambien marcar al rededor del observador un cierto número de objetos, y medir sus ángulos con el instrumento: la suma de estos ángulos debe ser igual á 360° valor de 4 rectos.

3. El *grafómetro* sirve: 1.° para medir los ángulos; 2.° para levantar ó bajar una perpendicular sobre una recta dada; 3.° para medir alturas inaccesibles.

4. Para medir un ángulo se coloca exactamente el grafómetro en el vértice del ángulo que se quiere medir. Hé aquí como se consigue; 1.° se suspende al trípode una plomada FK (fig. 45) que correspondiendo al centro del instrumento, caiga verticalmente sobre el punto del vértice E; 2.° se nivela en seguida el limbo; porque si se inclinase á derecha ó izquierda haria cometer un gran error en la medida de los ángulos. Con-

(1) Para la teoría del vernier, véanse las nociones de la física.

seguido el nivel y colocado el centro del instrumento precisamente en el vértice del ángulo, se alínea la alidada inmóvil AC sobre el lado en que están colocados los jalones CJ: se fija en seguida el limbo cerrando el tornillo de presion *a*; y colocando luego el ojo sobre la pínula G se vuelve la alidada hasta tanto que el punto Y del otro lado se encuentre en el rayo visual. Entonces queda formado el ángulo y solo resta contar los grados y partes de grados comprendidos en el arco CH para obtener su medida. Los grados y los semi-grados no ofrecen ninguna dificultad; pero no sucede lo mismo con los minutos. Sea AB (fig. 46) la porcion del limbo empleada en medir el ángulo



YEJ, y *ob* el *vernier* ajustado á la alidada móvil. Si el 0 del *vernier* correspondiese exactamente á la diferencia AB del 30°, sé contarian 30° para la medida del ángulo. Si por el contrario cayese sobre el punto *g* de los semi-grados, leeriamos 30° y 30'; pero si el 0° del vernier cae sobre una porcion de semigrado que la vista no pueda apreciar con exactitud, es necesario buscar hasta que la señal de los minutos 1, 2, 3, 4, 5, 6. etc., corresponda á una señal de grados ó semi-grados del limbo. Aquí es la señal 1.ª de minutos que corresponde á la señal 33°, de donde se sigue que la medida buscada del ángulo es 30° y 10'. Cuando en vez de partir de 0° sobre el limbo se procede desde 180° para estimar los grados los minutos se cuentan á la inversa.

5. Para levantar una perpendicular sobre una recta dada AB (fig. 47) se coloca el grafómetro en el punto C; se dirige la

alidada inmóvil segun la direccion AB, y hasta entonces dirigir la alidada móvil por el grado 90 del limbo para obtener la direccion CD que es la perpendicular pedida.

Para bajar una perpendicular del punto D, sobre AB, se coloca la alidada móvil sobre el grado 90 del limbo; se dirige la alidada inmóvil en la alineacion AB, y se busca por medio de tanteos un punto sobre la línea AB tal que las pínulas de la alidada móvil correspondan al jalon colocado de antemano en D. El punto C que corresponde á la direccion de las dos alidadas en el punto buscado y DC será por consiguiente la perpendicular bajada de D sobre AB.

6. Luego que por medio del grafómetro, se ha calculado la amplitud numérica de los ángulos de un polígono, solo resta medir sus lados con la cadena métrica, y trazar en seguida el plano, segun el croquis y las medidas tomadas sobre el terreno.

7. Se puede, con el grafómetro, medir alturas inaccesibles, porque por medio de la rodilla es fácil darle una situacion vertical.

Supongamos que se haya de medir la altura de una torre BD (fig. 48.)

Despues de tomada la base AB se mide el ángulo BAD; se tira en seguida la línea *ab* que contenga tantas partes iguales de la escala, como estadales contiene AB; se forma con el semi-círculo graduado el ángulo *dab* igual al ángulo DAB, y finalmente se levanta en el punto *b* la perpendicular *bd*: su punto de interseccion con *ad* determinará la altura BD.

Si la base no fuese horizontal, se coloca el instrumento en el punto A, tomado arbitrariamente (fig. 49); se miden los ángulos CAD y DAB; se tira en seguida sobre el papel la línea *ab* que contenga tantas partes iguales como estadales tenga la base AB; se forman en el punto los ángulos *cad* y *dab*, iguales á los ángulos CAD y DAB; finalmente, del punto *b* se tira una perpendicular *bc* á *ad*: la longitud comprendida entre los puntos *b* y *c*, llevada á la escala, nos dará la altura BC.

§. IV.—*Del levantamiento de planos con la brújula.*

1. La *brújula del agrimensor* es una caja cuadrada y chata (fig. 50) que se coloca horizontalmente sobre un pie. En esta caja está encerrada una aguja imantada que gira libremente sobre un quicio vertical en el centro de un círculo. Su circunferencia está graduada y cubierta con un cristal que permite leer los diversos grados en que se detiene la aguja, segun la direccion dada al instrumento.—En uno de los bordes de la caja, paralelo al diámetro que va de 0° á 180° está unida una *alidada*, y para dirigirse hácia cualquier objeto, es necesario girar la brújula entera al rededor del eje central colocado sobre un trípode. La alidada es ademas móvil sobre un eje en medio de su longitud, y puede moverse en sentido vertical.

2. El levantamiento de planos por medio de la brújula, está fundado sobre la propiedad que tiene la aguja magnética de tomar una direccion próximamente constante hácia el norte, por manera, que trasportando la brújula á un paraje cualquiera, la aguja toma en él una posicion paralela á la precedente.

3. Para medir con la brújula un ángulo CAB (fig. 50) se coloca horizontalmente el instrumento en el vértice A, y se tiran visuales con la alidada á uno de sus puntos B, que determinan los lados del ángulo. Como este punto B está distante, la direccion visual A′ B′ es sensiblemente paralela á AB, y la aguja se detendrá en un punto del limbo, cuya graduacion leeremos por ejemplo 24°.—Se muda en seguida la caja para dirigir al otro punto C; en este movimiento la aguja permanecerá fija en el espacio, ó á lo menos, despues de algunas oscilaciones volverá á tomar su direccion primitiva. Ahora bien, esta posicion no corresponderá ya al mismo punto del arco graduado, leyendo, por ejemplo, 88°. La diferencia de 24° á 88° ó 64° es la cantidad angular en que la caja ha girado sobre su eje, y por consecuencia el ángulo pedido BAC.

4. El agrimensor halla en la brújula las ventajas de no tener que tirar dos visuales para cada estacion, de obrar por esta misma razon con mayor rapidez, y de residir horizontal-

mente como con la plancheta, cualquier ángulo de un terreno inclinado.—Por otra parte tiene el inconveniente de no dar la medida exacta de los ángulos, puesto que no pueden obtenerse sino aproximados hasta un cuarto de grado. No pueden por consiguiente levantarse con este instrumento planos de terrenos muy extensos.—Es sin embargo muy útil para levantar planos de las sinuosidades de un sendero, de un arroyo, de una calle de un bosque, etc. especialmente cuando no es posible en cada estacion percibir mas que el punto donde debe estacionarse en seguida.

5. La brújula debe nivelarse en cada estacion, ya por el golpe de vista, ya por el nivel del aire. Es necesario colocar el centro en el punto preciso de la estacion, y antes de contar los grados, apartar la cadena, los piquetes, ó cualquier otro instrumento de hierro que pueda atraer la aguja en una direccion falsa.

6. Para orientar un plano, se observa, al levantar los ángulos del terreno, el ángulo que forma la aguja imantada de la brújula con la alidada inmóvil del grafómetro sobre una base de operacion: este ángulo da el *norte*.

La aguja imantada se separa aproximadamente 22° de la línea que va de *norte á sur*; y esta desviacion se llama *declinacion*. Es necesario, pues, al trasladar el ángulo de la meridiana, dar á su abertura 22° de menos al dirigirse del lado noroeste. Así, si el ángulo ha sido 145°, se contará de 123°

La parte superior del plano, debe siempre en cuanto sea posible designar el norte.

§. V.—*Del dibujo, copia y reduccion de planos.*

1. *Dibujar un plano* es trazar todas las líneas que contiene, y figurar, segun las convenciones, los diferentes detalles, como los caminos, edificios, fosos etc.—Esta operacion se llama *relacion del plano*.

2. El dibujo ó relacion de un plano exige, no únicamente destreza, sino tambien el uso de varios instrumentos, como una *mesa*, *papel para lavar*, una *escuadra* de cobre ó boj, un *semicírculo graduado* de cobre ó asta, una *escala de proporcion*, una *regla* de nogal, *lápices*, un *compás* y un *tira-líneas*.

3. La *delineacion* debe formarse enteramente en lápiz para poder hacer todas las correcciones necesarias. Luego se reemplazan las líneas de lapíz por otras de tinta de China.—Las curvas de los caminos, rios, etc. y los árboles, se dibujan con la pluma, usando al efecto de las de cuervo, que son susceptibles de cortarse muy finas.

4. Ocurre frecuentemente tener que *copiar un plano*, por ejemplo, cuando despues de levantado por la plancheta, el plano-minuta no conserva toda la frescura necesaria.

De dos modos podemos *copiar un plano*: ó *picándole*, ó por medio del calcado.

Picar un plano.—Para esta operacion se coloca debajo del plano que se quiere copiar, el pliego que debe recibirle; se estiende con cuidado, y luego por medio de un instrumento llamado *picador*, se pica cada punto extremo de las líneas que han de servir para su construccion. Se delínea en seguida el plano con una pluma y tinta de China, teniendo siempre cuidado de consultar el plano para no cometer errores.

Calcar un plano.—Se calca un plano al cristal, colocado en un papel blanco, y siguiendo la delineacion con la punta fina de un lápiz. Pero siendo muy cansada esta operacion puede reemplazarse por la siguiente.

Colócase el plano en una mesa bien lisa; se aplica sobre él un pliego de papel trasparente y muy fino, llamado *papel vejetal*, ó á falta de este, otro papel muy fino dado de aceite y bien limpio; luego se copia como al cristal el plano, cuyos delineamientos permite distinguir la trasparencia del papel.

5. La reduccion de un plano se hace como hemos visto en el *dibujo lineal*.

SECCION SEGUNDA.

LAVADO DE LOS PLANOS.

1. El *lavado* es el arte de dar á cada especie de terreno el colorido mas análogo á su naturaleza con el objeto de distinguir perfectamente todas sus desinencias.

2. Los planos se consideran iluminados por un rayo de luz que va á herir los objetos bajo un ángulo de 45° en la direccion de izquierda á derecha. La parte por la que reciben los objetos la luz, se da con un trazo muy delgado, y mas grueso por el lado opuesto. La sombra se dá con la tinta de China.

3. Es de la mayor importancia para el trazado y para las sombras, una tinta de China de buena calidad. La mala tinta de China forma grumos, no tiene lustre y da un color negro muy sucio, al paso que la buena es muy dura, quebradiza y lustrosa; si se frota una barrita con la uña mojada, se deslie con mucha facilidad, produce un color muy brillante y las líneas que con esta tinta se tiran, no sufren alteracion alguna, cuando despues de secas, se proceda al lavado por medio del pincel.

4. Los colores necesarios para el lavado de los planos, son: la *tinta de China*, la *sepia*, la *gutagamba*, el *azul de Prusia* ó *añil*, el *carmin* y el *verde de vejigas*.

5. Los pinceles son de marta cebellina, y serán de buena calidad si despues de mojarlos presentan una punta muy afilada, cuya elasticidad resista á los esfuerzos que con la mano hagamos para destruirla. Se necesitan por lo menos dos, de los cuales el uno sirve para cojer la tinta, y el agua el otro á fin de dar con ella la aguada conveniente.

Cuando hayan de mezclarse dos colores, se tomará cada uno de ellos con distinto pincel, y luego se extenderán hasta que hayan adquirido la tinta conveniente.

6. Los diversos objetos que puede contener un plano, se lavan de la manera siguiente:

Para las *tierras de labor* se emplean dos tintas ligeras, la una muy clara de carmin y gutagamba, y de verde claro la otra, señalando los surcos con puntos de un color subido y análogo á su cultivo, bien sea verde, etc.

Las *viñas* se representan delineando con la tinta de China unas estaquillas en un trozo parecido á una S, y se lavan con una mezcla de tinta de China, de carmin, de sepia y añil.

El lavado de las *praderas* se da con una tinta verde compuesta de una poca gutagamba y mayor cantidad de azul.

Para los *bosques* y *sotos* se emplean dos tintas, de bastante gutagamba y algun carmin la una, y la otra de verde mezclado con la primera.

Se figura la elevacion de los *árboles* por medio de su tallo y hojas á fin de imitar su naturaleza y poder distinguir con la vista un chopo, por ejemplo, de una encina ó de un árbol frutal. Se representan echados hácia el lado opuesto á aquel por donde viene el rayo luminoso, y se lavan con verde de vejiga bastante espeso.

Las *huertas* se lavan con una tinta verde muy clara.

Para los *estanques*, *rios* y *arroyos* se emplea el azul de Prusia muy claro, figurando las ondulaciones por medio de algunas líneas de color mas subido, é indicando su corriente con una flecha, cuya punta señala su direccion.

El lavado de los *pantanos* y *lagunas* se da con una tinta azul y algunas pinceladas verdes en las orillas.

En los *eriales* se emplea una tinta verde menos subida que en los prados.

Los *matorrales* se lavan matizándoles de verde y color de rosa: el primero se compone de gutagamba y azul, y de carmin y agua el segundo.

Los *páramos* reciben el lavado con dos tintas, de verde mate la una, y de carmin y gutagamba la otra.

En los *arenales* se emplea la gutagamba y un poco de carmin; y luego se señala con puntos.

Los *peñascos* y *canteras* se delinean procurando que esten bien caracterizados. La parte de sombra se lava con una tinta compuesta de carmin, tinta de China y gutagamba, y se indican las hendiduras con el mismo color algun tanto mas subido. Se dan algunas pinceladas de color azul en la parte que figura estar iluminada.

Como en los peñascos, se modifica en las *montañas* la tinta de arriba á abajo: el lado opuesto á la luz es mas intensa y las faldas se representan por medio de unas rayitas cruzadas que constituyen la sombra.

Los edificios se dibujan con tinta colorada, señalando las partes que están en sombra por medio de una línea de carmin, y el espesor de sus paredes con una tinta igual y muy clara de carmin. Lo propio se verifica en todas las demás construcciones.

AMPLIACIONES

PARA

LOS ALUMNOS DE ESCUELA SUPERIOR.

NOCIONES DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

§. I.—*Método de las proyecciones.*

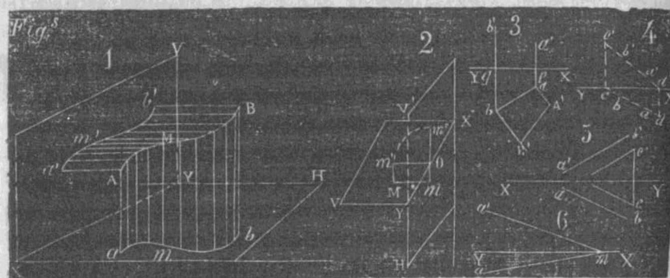
Monge ha dado el nombre de *Geometría descriptiva* á los métodos que ha, sino creado, á lo menos reunido en un cuerpo de doctrinas singularmente perfeccionadas, y que tienen por objeto, ya representar todas las formas exteriores de los cuerpos, ya resolver en figuras consideradas en el espacio con el auxilio de contracciones ejecutadas solamente sobre un plano todos los problemas posibles.

Para llegar á este doble objeto y para representar desde luego los cuerpos, la geometría descriptiva emplea el *método de las proyecciones.*

Llámase *proyeccion de un punto* en un plano, el pié de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

La proyeccion de una recta A, es la recta tirada en el *plano de proyeccion* por las proyecciones de dos puntos de A; es decir, la interseccion del *plano proyectante* formada por la recta A perpendicularmente al plano de proyeccion.

Generalmente la proyeccion de una curva cualquiera A, M, B, (*fig.* 1.ª) es la serie *amb* de los pies de las perpendiculares Aa, Mm, Bb, bajadas de diferentes puntos de esta curva al plano fijo XH. La reunion de estas perpendiculares compone una superficie cilíndrica en el sentido general de esta palabra, y esta superficie toma el nombre de *cilindro proyectante* de la curva AMB.



Si se proyecta la curva A, M, B sobre un segundo plano VX, perpendicular al primero HX, la reunion de las dos proyecciones *amb*, a' m' b' determina completamente la curva AMB en el espacio; porque esta curva es la interseccion de dos superficies cilíndricas rectas que tienen por directrices las proyecciones *amb*, a' m' b' y por generatrices de las rectas respectivamente perpendiculares á los planos de estas proyecciones.

Para que las construcciones relativas á las líneas en el espacio puedan ejecutarse sobre un mismo plano, basta imaginar que el plano vertical VX (*fig.* 2.ª) ha sido rebajado de izquierda á derecha sobre el plano horizontal *H X* girando al rededor de su interseccion comun XY como gozne. Entonces todos los puntos m' del plano vertical han descrito arcos de círculo m' m'', y las construcciones gráficas pueden efectuarse en una misma hoja de papel V' XH que toma el nombre de *montea*, pero este aplanamiento no está admitido sino como medio de ejecucion, y siempre que intentamos darnos razon de una operacion por construcciones geométricas, debemos con

el pensamiento, levantar el plano vertical y figurársele siempre en una situacion perpendicular al plano horizontal.

Las proyecciones m y m'' de un mismo punto M del espacio están situadas en una misma perpendicular á la línea de tierra despues del aplanamiento.

Se designan ordinariamente por las letras A, B, C, etc. los puntos del espacio; por las itálicas análogas *a*, *b*, *c*, etc. las proyecciones horizontales de estos puntos, y por las itálicas con los acentos a', b', c', etc. sus proyecciones verticales.

La manera de representar las superficies sobre los planos de proyeccion depende del modo de generacion de las superficies. En general, se representan las proyecciones de las *directrices*, sobre las cuales la *generatriz* ha de apoyarse en todas sus posiciones.

Así, para una superficie cónica, se toman las proyecciones de la directriz, las del vértice y entre las posiciones en número infinito, que puede ocupar la generatriz, se eligen las que pueden considerarse como los límites de todas las demás.

Se opera del mismo modo para obtener una superficie cilíndrica.

Para una superficie de revolucion se toman ordinariamente las proyecciones del eje y las de la generatriz ó las de la curva meridiana. Se puede tambien tomar para directriz una de estas dos curvas, y por generatriz un círculo de rádio variable, cuyo centro esté sujeto á moverse sobre el eje dado.

Resulta de los diversos modos de representacion de los cuerpos, que la proyeccion de un objeto no es otra cosa que una *vista* de este objeto, tomada de un punto infinitamente lejano delante del plano de proyeccion.

§. II.—*Diversos problemas sobre las líneas rectas y los planos.*

Problema I. Hallar la verdadera distancia entre dos puntos A y B determinados en el espacio por sus proyecciones (a, a') y (b, b' *fig.* 3.ª)

A las extremidades de la recta *ab*, que reune las proyeccio-

nes horizontales de dos puntos, levántense dos perpendicula-
res aA', bB', respectivamente iguales á las distancias $a'p$, b,g
de los puntos a' y b' de la líneas de tierra : $A'B'$ será la dis-
tancia pedida ó la verdadera longitud de la recta, cuyas pro-
yecciones son : ab, $a'b'$.

Cuando una recta es paralela á uno de los dos planos de proyeccion, su proyeccion en el otro plano es paralela á la línea de tierra.

Cuando una recta está situada en uno de los dos planos de proyeccion, esta misma recta es su proyeccion en este plano, y la otra se confunde con la línea de tierra.

Cuando una recta está situada en un plano perpendicular á la línea de tierra; y por consiguiente á los dos planos de proyeccion, sus dos proyecciones se confunden en una sola y misma recta perpendicular á la línea de tierra, y para determinarla es preciso conocer, ya su proyeccion sobre un tercer plano perpendicular á los dos primeros, ya sus trazas, es decir, los puntos en que se encuentran los dos planos.

Problema II. Dados (*fig.* 4.ª) las proyecciones ab $a'b'$ de una recta hallar las trazas de esta recta.

Prolónguese ab hasta la línea de tierra XY en c; el punto c', donde la perpendicular cc' á la línea de tierra corta la recta $a'b'$ es la traza buscada en el plano vertical. Se obtiene del mismo modo el punto d donde la recta situada en el espacio, encuentra el plano horizontal.

Problema III. Dadas las proyecciones ab $a'b'$ de una recta y las de un punto (cc' *fig.* 5.ª) hallar las proyecciones de una recta paralela á la recta dada y pasando por el punto dado.

Estas proyecciones son respectivamenta paralelas á las proyecciones dadas y pasan por los puntos c y c'

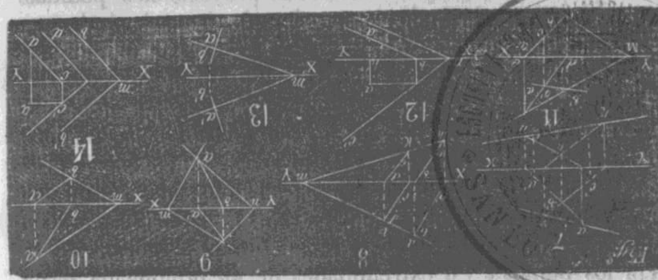
Se representa un plano por sus *trazas*, es decir, por sus intersecciones con los planos de proyeccion. Las trazas ma' ma de un plano (*fig.* 6.ª) se cortan evidentemente en un punto de la línea de tierra XY.

Cuando un plano es perpendicular á uno de dos planos de proyeccion, su traza sobre el otro plano es perpendicular á la línea de tierra.

Cuando un plano es paralelo á uno de los dos planos de pro-

yeccion, no tiene mas que una traza que es paralela á la línea de tierra en el otro plano de proyeccion.

Problema IV. Hallar las trazas del plano que pasa por tres puntos, y cuyas proyecciones $(a\ a')$ $(b\ b')$ $(c\ c')$ sean dadas (*figura* 7.ª)



Búsquense los puntos u y h, v y k, donde las rectas (ab) y (bc, bc') encuentran los planos de proyeccion. Las trazas del plano buscado serán vu, hk, é irán á concurrir en un mismo punto de la línea de tierra XY.

Además de esta prueba de estos medios de construccion hay otros dos fundados en que la recta (ac, $a'c'$) debe encontrar los planos de proyeccion sobre las trazas ya determinadas para el plano buscado.

El problema precedente conduce tambien á hallar las trazas de un plano que pasa por dos rectas que se cortan.

Problema V. Dadas las proyecciones (ab, $a'b'$) y cd, $c'd'$) de dos rectas paralelas (*fig.* 8.ª), hallar las trazas del plano formado por estas dos rectas.

Las trazas uv, hk del plano pasan respectivamente por las trazas verticales u y v, y por las trazas horizontales h y k de las rectas dadas.

La construccion precedente se aplicará tambien al problema siguiente : hallar las trazas de un plano formado por un punto y por una recta, cuyas proyecciones se conocen.

Para esto bastará tirar para las proyecciones del punto de las paralelas á las proyecciones de la recta y concluir como arriba.

Problema VI. Dadas las trazas *amb*, *anb'* de dos planos (*figura* 9.ª) hallar las proyecciones de su interseccion.

Bájense de los puntos *a* y *b'* las perpendiculares *aa'* y *bb'* á la línea de tierra: *ab* y *a'b'* serán las proyecciones pedidas.

Problema VII. Dada la proyeccion horizontal *ab* de una recta contenida en un plano, así como las trazas de este plano *a' mb*, hallar la proyeccion vertical *a'b'* de la recta (*figura* 10).

Esta proyeccion se determina formando *bb' aa'* perpendiculares á la línea de tierra y reuniendo *b'a'*.

Problema VIII. Conocidas las proyecciones *ab*, *a'b'* de una recta, y las trazas de un plano *d*M*c*, (*fig* 11) hallar las proyecciones *o* y *o'* del punto donde la recta corta el plano.

Por los puntos *c* y *d* extremidades de *ab* prolongada hasta el encuentro de la línea de tierra y de la traza M*d*, tírense las rectas *cc'*, *dd'* perpendiculares á la línea de tierra, y tírese *c' d'* que cortará en *o'* proyeccion vertical del punto buscado la recta *a' b'*. La otra proyeccion *o* está á la vez sobre *cd* y sobre la recta *o' o* perpendicular á la línea de tierra.

En el caso (*fig.* 12) en que la recta dada es vertical, y en donde por consiguiente su proyeccion horizontal es un punto *a*, situado en el prolongamiento de su proyeccion vertical *a' h* que es perpendicular á la línea de tierra, es preciso tirar *a* paralela á *mc*, despues *bb*, perpendicular y *b' a'* paralela á la línea de tierra. Se obtiene de este modo el punto *a'*.

Esta última construccion sirve para resolver el problema siguiente: hallar la proyeccion vertical de un punto, cuya proyeccion horizontal es conocida y que está situada en un plano determinado por sus trazas.

Problema IX. Por un punto, cuyas proyecciones *b* y *b'* se nos dan, tirar una perpendicular á un plano *ama'*, cuyas trazas conocemos (*fig.* 13).

Las proyecciones *b a* y *b' a'* de la perpendicular buscada son perpendiculares á las trazas del plano.

Se pueden buscar las proyecciones del punto donde esta perpendicular encuentra el plano dado como en el proble-

ma VIII; despues determinar la longitud de la parte de esta recta comprendida entre el punto dado y el plano, segun el problema I.

Problema X. Por un punto (*a*, *a'*) (*fig.* 14), cuyas proyecciones se nos dan, tirar un plano *dnc'* paralelo á otro plano, cuyas trazas *bmb'* tambien conocemos.

Las trazas *nd*, *nc'* del plano buscado son paralelas á las trazas del plano dado, y el punto *c'* de una de las trazas está determinado tirando *ac* paralela á la otra traza; *cc'* perpendicular, y *a'c'* paralela á la línea de tierra.

Problema XI. Hallar las trazas de un plano que pasa por una recta dada por sus proyecciones y que sea paralela á otra recta conocida.

Por un punto de la primera de las dos rectas tírese una paralela á la otra (problema III); siguiendo esta paralela y la primera recta, hágase pasar un plano (problema IX): este será el pedido.

Problema XII. Siguiendo un punto dado por sus proyecciones, tirar un plano perpendicular á una recta dada.

Las trazas del plano son perpendiculares á las proyecciones de la recta, y por consiguiente solo se trata de tirar por un punto dado un plano paralelo al plano dado (problema X).

Problema XIII. Siguiendo una recta dada por sus proyecciones, tirar un plano perpendicular á otro plano determinado por sus trazas.

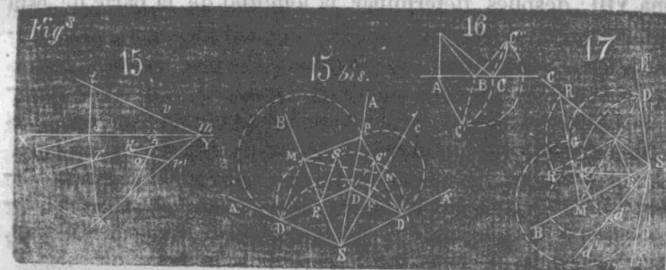
De un punto cualquiera tomado en la recta bájese una perpendicular al plano dado (problema IX); por esta perpendicular y por la recta dada, hágase pasar un plano (problema IV): y este será el pedido.

Problema XIV. Siguiendo un punto dado por sus proyecciones, tirar un plano perpendicular á otros dos determinados por sus trazas.

Búsquese la interseccion comun de los dos planos dados (problema VI); y por el punto dado tírese un plano perpendicular á esta recta (problema XII.)

Problema XV. Dadas las proyecciones de dos rectas que se cortan, determinar el ángulo de estas dos rectas.

Determínense las trazas de las rectas dadas (problema II.)



Sean u y v (*fig.* 15) estas trazas sobre el plano vertical k y h en el plano horizontal; u v y k h son las trazas del plano que contienen las rectas dadas y se encuentran en un mismo punto m de la línea de tierra.

Tírese por un punto cualquiera s de la línea de tierra st perpendicular á XY y st, perpendicular á mhk, despues st' perpendicular á st' é igual á st. Tírese rt'', tómese $rt' = rt''$ y añádase mt'. Tómese, en fin, $tu' = tu$ y $t'v' = tv$ y tírese kv' y h v, y aplanando las rectas dadas k v y h u, será un ángulo koh el buscado.

Problema XVI. Dadas las trazas de dos planos, determinar el ángulo diedro de dos planos.

Búsquese la interseccion de dos planos dados (problema VII); por un punto cualquiera de esta interseccion, tírense rectos perpendiculares á estos planos (problema IX): el ángulo de estos perpendiculares será el suplemento del ángulo de estos planos, y el problema queda así reducido al precedente.

§. III.—*Problemas sobre los triedros.*

Dadas tres de las seis cantidades (ángulos diedros y planos) que constituyen un ángulo tiedro, podemos proponer hallar las otras tres por medio de construcciones planas.

Observemos desde luego, que si, desde un punto tomado en el interior del tiedro, se bajan perpendiculares sobre las tres caras, los tres ángulos planos formados por estas perpen-

diculares constituyen un nuevo tiedro, que se dice ***suplementario*** del primero. Los dos tiedros gozan de la propiedad notable, que el ángulo diedro de cada uno de ellos, es igual al suplemento del ángulo correspondiente al otro. Se puede, pues, por la consideracion del tiedro suplementario reducir á tres problemas distintos los seis que se presentan cuando se trata de determinar tres de los elementos de un tiedro por el conocimiento de los otros tres.

1.º Dadas las caras planas A′ SA, ASB, BSA″ (*fig.* 15 *bis*) que componen un ángulo sólido, y que se le supone abatido sobre un mismo plano, hallar los valores de tres ángulos diedros.

Tómense S D′ = S D″ Por los puntos D′ y D″ bájense respectivamente sobre las rectas SC′ SB las perpendiculares O′ D, D″ D que se cortan en D. Constrúyanse los triángulos rectángulos DFG′, DEG″, con los lados DF, DE y con las hipotenuras FG′ = FD′, EG″ = ED″. Los ángulos DFG′, DEG″ serán las medidas de los ángulos diedros formados sobre las aristas SC, SB.

Para obtener el tercer ángulo diedro, formado sobre la arista, cuyos abatimientos están en SA′, y SA″, se levantarán sobre SA′ y SA″ las perpendiculares D′ N, D″M; se tirarán M N, y obtendremos el triángulo MPN, en el cual MP = MD″ y NP = ND′, el ángulo MPN es la medida del ángulo diedro pedido.

Como comprobaciones, el punto P debe caer sobre la línea SDA, M N, y debe ser perpendicular á SA en donde se encontrarán DG′ = DG″.

Este problema comprende como caso particular el de la ***reduccion de un plano al horizonte*** que es muy útil en la confeccion de cartas y planos. Así se han observado (*fig.* 16) los ángulos ASC = C y ASB = Y que dos rayos visuales inclinados al horizonte hacen con la vertical SA y ademas el ángulo de que estos dos rayos visuales hacen entre sí; se toma en consideracion el valor de la proyeccion horizontal del ángulo a, que hacen las proyecciones horizontales de los rayos visuales.

Así, de lo que se trata evidentemente, es de construir el ángulo diedro formado por los planos verticales tirados siguiendo los dos rayos visuales.

Hagamos, pues, $BSC''=a$, tomemos $SC''=SC$, luego determinemos el punto C' por la interseccion de dos arcos de círculo, tales como $BC'=BC''$ y $AC'=AC$. El ángulo CAC' será el ángulo pedido.

2.° Dadas las dos caras A'SC, CSB de un tiedro (*fig.* 15 *bis*), y el ángulo diedro comprendido hallar las otras partes.

Con el rádio arbitrario SD' descríbase del centro S un arco de círculo indefinido: Bájese una perpendicular indefinida D'FD sobre SC, hágase el ángulo DFG' igual al ángulo diedro dado, tómese $FG'=FD'$, bájese G'D perpendicular sobre D'D y DD'' perpendicular sobre SB. La interseccion de esta recta con el arco D'DD'' determina el punto D'', y por consiguiente la cara BSA''.

Conocidas las tres caras, se terminará las construcciones de la *fig.* 15 *bis* para hallar los otros dos ángulos diedros.

3.° Conscidas las dos caras A'SC, CSB (*fig.* 17) de un ángulo sólido y el ángulo diedro opuesto á una de ellas, hallar las otras partes.

De un punto D' tomado arbitrariamente sobre SA', bájese D'F perpendicular á SC; del punto F condúzcase en seguida FE perpendicular y FR paralela á SB. Hágase el ángulo FER igual al ángulo diedro dado, tómese $FR'=FR$, tírese MR' que está cortado G y *g* por el arco descrito del punto F como centro con el rádio FD'. El aplanamiento SD''A'' *o* S*d''* *a''* de la tercera cara, nos será dado por el punto D'' *od''* que es á la interseccion del arco descrito del punto S como centro con el rádio SD' y de los arcos descritos del punto M como centro con los radios M*g* MG.

Como se ve, el problema puede admitir dos soluciones diferentes.

§. IV.—*Planos tangentes á la superficie.*

Un plano se llama *tangente* á una superficie en un punto dado cuando contiene las tangentes en todas las curvas que trazariamos sobre esta superficie por el punto en cuestion.

Para determinar este plano, basta hallar las tangentes de dos curvas pasando por el punto de contacto sobre la superficie.

Cuando se proyecta sobre un plano una curva y su tangente, las proyecciones de estas dos líneas son tangentes entre si.

El contorno aparente de una superficie proyectada sobre uno de los dos planos de proyeccion se obtiene buscando los puntos de contacto de todos los planos tangentes que son perpendiculares al otro plano de proyeccion.

El plano tangente á una superficie cilíndrica ó cónica, contiene la generatriz rectilínea que pasa por el punto de contacto. Contiene además la tangente á la curva que se obtiene cortando la superficie por un plano paralelo al plano de la directriz. Es, pues, fácil hallar las proyecciones de dos rectas que determinan los planos tangentes á las superficies cilíndricas y cónicas.

En toda superficie de revolucion, el plano tangente es siempre perpendicular al plano meridiano que pasa por el punto de contacto; y la *normal* ó recta tirada perpendicularmente al plano tangente por el punto de contacto, va á encontrar el eje, en un punto que no varia para un mismo paralelo (seccion perpendicular al eje.)

§. V.—*Intersecciones de las superficies.*

Supongamos que se corta una superficie, cuya ley de generacion es conocida, por un plano horizontal, y que se construye un cierto número de posiciones de la generatriz en proyecciones horizontales y verticales. Los puntos donde cada una de estas últimas sean halladas por la paralela á la línea de tierra que es la traza única del plano cortante, nos dará un punto de la proyeccion vertical de la interseccion de la superficie dada con el plano; y elevando estos puntos sobre las proyecciones horizontales de tal generatriz se deducirá la proyeccion horizontal de la interseccion buscada.

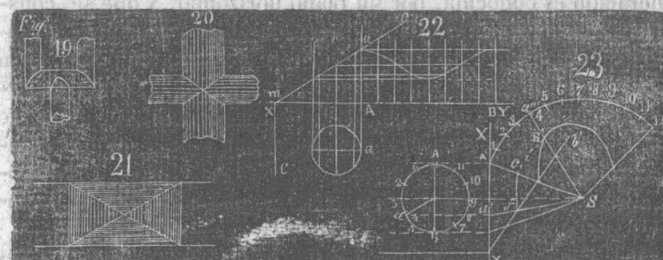
Cuando se quiera hallar la interseccion de dos superficies cualesquiera, si se les corta por una serie de planos horizontales, y se construyen sus intersecciones por cada uno de estos cortes horizontales, los puntos comunes á estas intersecciones, servirán para determinar, en proyeccion horizontal primero, y en proyeccion vertical despues, la forma de la curva segun la cual se penetran las dos superficies.

Este método es general y bastante para todos los casos. Pero se puede dar á los planos secantes la direccion que se quiera, con tal que se sepan construir fácilmente las curvas auxiliares determinadas por las intersecciones de estos planos con la superficie.

La interseccion buscada está determinada cuando se han construido sus dos proyecciones; pero si esta línea es plana, es menester, por otra parte egecutar el *abatimiento* sobre uno de los dos planos de proyeccion. Cuando una de dos superficies propuestas es capaz de desarrollo, basta tambien efectuar el desarrollo de esta superficie, y construir con ella *transfomada* de la interseccion.

En cuanto á la tangente en un punto de la interseccion comun de dos superficies, está determinada por la interseccion de planos tangentes á dos superficies; es perpendicular al plano de dos normales á estas superficies.

Las *figuras* 19, 20 y 21 representan diversos ejemplos de penetraciones y de intersecciones mútuas de superficies cilíndricas. La primera representa su *elevacion* (proyeccion vertical) el encage de los tubos verticales en un tubo cilíndrico horizontal.



La segunda demuestra en *plano* (proyeccion horizontal) la interseccion de dos cunas cilíndricas que se cortan siguiendo una *bóveda de aristas*.

La tercera demuestra en plano la interseccion de dos cunas cilíndricas que determinan una *bóveda en arco de claustro*. Esta última no se diferencia de la bóveda de aristas mas que en la una se conservan las porciones suprimidas en la otra y recíprocamente.

La *figura* 22 representa el desarrollo de la curva que se obtiene cortando un cilindro recto de base circular por un plano *cmc'* inclinada á esta base. La recta A B tiene por longitud la circunferencia de la base del cilindro y está dividida al mismo tiempo en tantas partes iguales, como esta circunferencia.

La *figura* 23, representa tambien el desarrollo de la curva que se obtiene cortando oblicuamente por un plano *b m b*, un cono recto de base circular. Es fácil de comprender la construccion con auxilios de la cual determina cada uno de los puntos F' del desarrollo de la curva.

§. VI—*Principios de perspectiva lineal.*

La *perspectiva lineal* tiene por objeto representar sobre un plano único los contornos aparentes de los objetos.

Para llegar á este fin, se imagina que los rayos luminosos que parten de todos los puntos de estos contornos que se dirigen en línea recta hacia el ojo, se cortan por un plano que se llama *cuadro*; las *trazas* de todos estos rayos sobre el cuadro serán las perspectivas de todos los puntos correspondientes de los objetos.

Si pues se conoce la proyeccion horizontal y vertical de un *rayo visual*, se podrá por los métodos de la geometria descriptiva, hallar el punto en que corta el plano del cuadro. Este último ramo de la geometria contiene pues implícitamente la teoría y la práctica de la perspectiva lineal.

Se toma ordinariamente el plano del cuadro vertical, y se trazan en el plano horizontal las proyecciones de las figuras cuyos relieves ó las alturas verticales son conocidas.

Se llama *punto de vista* ó *punto principal* el pié de la perpendicular bajada del ojo del espectador al plano del cuadro;

líneas de horizonte, una paralela á la línea de tierra conducida por el punto principal; *puntos de distancia*, dos puntos situados sobre la línea del horizonte á izquierda y derecha del punto principal y á distancias de esta iguales á la distancia del ojo al plano del cuadro.

Toda línea recta queda recta en perspectiva.

Toda recta paralela al plano del cuadro queda paralela así mismo en perspectiva.

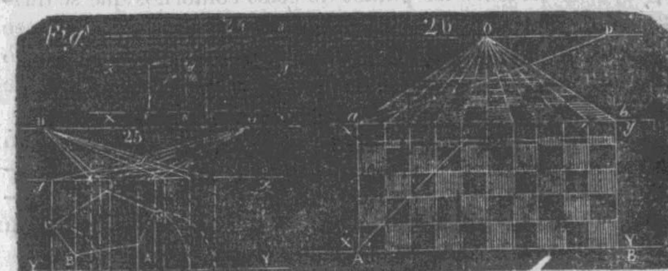
Las rectas paralelas entre sí, pero que no son paralelas al plano del cuadro, concurren en perspectiva; y para obtener su *punto de huida* ó de *concurso* es preciso, suponer tirada por el ojo del espectador, una recta paralela á las primeras, y prolongarla hasta el encuentro del plano del cuadro.

Toda recta que pasa por el pié del espectador, ó en otros términos, por la proyeccion horizontal del ojo de este, es vertical en perspectiva.

Si una recta es perpendicular al plano del cuadro, su perspectiva pasa por el punto principal.

Si una horizontal hace con el plano del cuadro un ángulo de 45º, su perspectiva pasa por uno de los dos puntos de distancia.

Propongámonos poner en perspectiva un punto M, situado en el plano horizontal de proyeccion (*fig.* 24).



Comencemos, por notar que, si el plan del cuadro está reflejado en el plano horizontal, dando vueltas al rededor de la línea de tierra X Y, como los objetos de los que queremos conocer la perspectiva están detrás del plano del cuadro, el diseño de la perspectiva caerá en medio de las proyecciones horizontales. Para evitar este inconveniente, se supone que la línea de tierra ha sido retirada paralelamente á si misma en x y, antes que el abatimiento se hubiese efectuado.

Esto supuesto la perspectiva *m* del punto M será la interseccion de la recta *Oa* que pasa por recta b D, que pasa por el punto principal, y de la recta *p* D, que pasa por el punto de distancia.

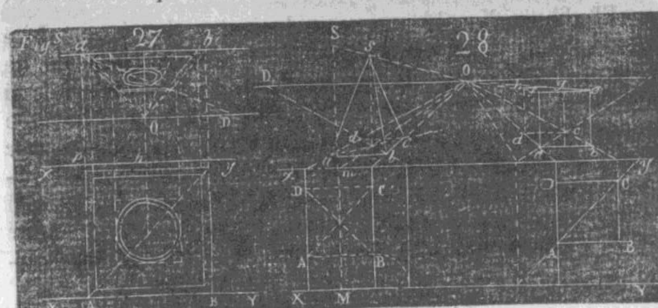
La perspectiva *a b c d e*, (fig. 25) del polígono A B C D E situado sobre el plano horizontal se determinará por los vértices, como se acaba de indicar por el punto M, la perspectiva de cada vértice, estando en la interseccion de dos líneas rectas, fáciles de trazar.

Para describir la perspectiva de un círculo colocado en el plano horizontal de proyeccion, es preciso determinar la perspectiva de los vértices de un polígono regular circunscrito á este círculo, y en seguida inscribir en el una curva (que es un elipse.

La *figura* 26 demuestra cómo se puede poner en perspectiva un pavimento compuesto de cuadrados.

Si se tratase de poner en perspectiva una figura situada en un plano horizontal cualquiera cuya altura encima del plano horizontal de proyeccion se conoce y cuya traza sobre el plano del cuadro se puede figurar, se repetirán las construcciones procedentes, sirviéndose de esta traza como de la línea de tierra.

Esto es lo que se ha hecho en la *figura* 27 que representa



la perspectiva de un cielo raso, en que se ve la proyeccion horizontal y en que *a p* es la altura.

En fin, la *figura* 28 da la perspectiva de una pirámide regular de base cuadrada, cuya altura es *m o* y la perspectiva de un cubo.

Se han inventado diversos instrumentos para tomar las perspectivas de los objetos. El mas usado en el dia es el *diógrafo* de M. Gavard, cuya idea fundamental se encuentra en la máquina perspectiva del célebre Wren, el arquitecto que edificó á San Pablo de Lóndres. Sin embargo el diógrafo ha experimentado diversas variaciones de construccion muy ingeniosas que no presentaba la máquina de Miren.

El *fisionotrace* es un instrumento muy inferior al diógrafo, pero que puede servir para reducir á una pequeña escala los contornos de los objetos próximos y de mediano tamaño. Es un sencillo tronco recto, movible al rededor de un punto fijo, que describe por consiguiente, por sus extremidades, superficies cónicas semejantes al rededor de este punto.

METODO

PARA LA ENSEÑANZA DEL DIBUJO LINEAL.

«El dibujo lineal es un ramo de instruccion á que debe darse una alta importancia, porque es á la vez un medio de desarrollar la facultad de la percepcion, y un auxiliar de casi todos los demas ramos de enseñanza. El dibujo lineal no debe nunca descuidarse en las escuelas que son frecuentadas por niños pobres, pues entre ellos se hallan una porcion de futuros artistas, á quienes será de la mayor utilidad. Respecto al método que conviene seguir, puede adoptarse el de comenzar á hacer copiar simples líneas geométricas, luego figuras regu-

lares, en seguida máquinas ú objetos diversos, y finalmente, cartas geográficas y mapamundis (1).»

En efecto, el *dibujo lineal*, tomado en un sentido general, es el *arte de imitar los contornos de los cuerpos y de sus diferentes partes por medio de simples delineamientos sin el auxilio de sombras ni colores*. Así, el dibujo lineal, que tiene su natural origen en el nacimiento de las artes industriales, es de suma utilidad á casi todas las profesiones, pero principalmente á aquellas cuyos trabajos consisten en la imitacion de las figuras. En todos tiempos el gefe de un taller, para hacerse entender de sus oficiales, y estos igualmente para entenderse entre sí, se han valido de diseños mas ó menos exactos. Así, los carpinteros, los albañiles, los ebanistas, los torneros, en una palabra, un artesano cualquiera, necesita á cada paso conocimientos de dibujo lineal. No es pues difícil persuadir la importancia de su enseñanza en las escuelas comunes.

Hay dos especies de dibujo lineal: dibujo lineal á pulso ó sin instrumentos, y dibujo lineal gráfico ó con instrumentos. A esto podemos añadir las nociones sobre proyecciones, arquitectura y perspectiva. Para la enseñanza pues del dibujo lineal pueden hacerse dos grandes divisiones: la primera se ocupará del dibujo lineal á pulso, y la segunda del gráfico.

El dibujo á pulso comprenderá la formacion de las líneas rectas y curvas con sus aplicaciones. Los niños aprenderán: 1.º lo que es línea vertical, horizontal y perpendicular, y aplicarán estos conocimientos á la formacion de dibujos de *ensambladuras de carpintería*, *escuadras*, *alineacion de caminos*, *pilastras*, *jambas*, *persianas*, *estrados*, *escaleras*, *chimeneas*, *rejas*, *ventanas*, *embaldosados*, *resbolillos y paredes de piedra de sillería*. 2.º Se ejercitarán en la formacion de líneas curvas, aplicando luego este conocimiento para dibujar círculos, elipses, óvalos y espirales, de donde pueden naturalmente pasar á imitar dibujos que representen *la media luna*, *estrellas de seis rayos*, *transportadores*, y finalmente, *mapamundis*. 3.º Imitarán *varias molduras*, ya rectas, ya circulares, ya compuestas, como por ejemplo: *filetes*, *larmieas*, *fajas de corona*, *cuartoboceles*,

(1) Rendu fils.

toros, gorgueras, cabetos, escocias, talones, arcos de ventanas, poleas y aparejos, rejas de balcon, ruedas hidraúlicas, engranajes, astrágalos, cornisas, floreros, jarrones, soperas, teteras, garrafas, candelabros, cuadrantes de reloj, rosas náuticas, cruces de honor, portadas de tienda, etc., etc.

El dibujo gráfico debe tener por objeto lo mismo que hayan ejecutado los niños á pulso, con la sola diferencia de valerse para ello de instrumentos. Los necesarios al efecto son: *una regla, un compás, nn tiralíneas, un portalápiz, y una escala de proporcion.* Hecho lo cual podrá ampliarse la enseñanza: 1.º al estudio de las proyecciones, aplicándolas al dibujo de *tejados, camas de barco, cómodas, escritorios, sillas, prensas, bombas, norias, gatos, tornos, etc.*; 2.º á unas ligerísimas nociones de los órdenes de arquitectura; y 3.º á una perspectiva fácil, como un *vaso ó una série de arcadas.*

Así para el dibujo á pulso como para el gráfico, son necesarios modelos que imitar.

TABLAS

DE CORRESPONDENCIA RECIPROCA

ENTRE LAS PESAS Y MEDIDAS MÉTRICAS

mandadas emplear en España por la ley de 19 de julio de 1849, y las que actualmente están en uso, segun resulta de los trabajos ejecutados en los años 1798 á 1800 por D. Gabriel Ciscar y D. Agustin Pedrayes, y de las comparaciones hechas actualmente por la Comision de pesas y medidas entre los tipos métricos que existen en el Conservatorio de Artes y los modelos que han remitido las provincias, todo en cumplimiento de lo que previene el articulo 7.º de la citada ley.

MEDIDAS Y PESAS LEGALES DE CASTILLA.

La vara de Búrgos.	vale	0 metros, 835905 millonésimas de metro.
Un metro		1 vara, 196308 millonésimas de vara, ó sea 1 vara, 0 pies, 7 pulgadas, 0 líneas, 805 milésimas de línea.
La libra		0 kilógramos, 460093 milígramos.

Un kilógramo. . . .	2 libras, 173474 millonésimas de libra, ó sea 2 libras, 2 onzas, 12 adarmes, 409 milésimas de adarme.
La cántara ó arroba de vino.	16 litros, 133 mililitros.
Un litro de vino . . .	1 cuartillo, 983512 millonésimas de cuartillo, ó sea 1 cuartillo, 3 copas, 934 milésimas de copa.
La arroba de aceite . .	12 litros, 563 mililitros.
Un litro de aceite. . .	1 libra, 989971 millonésimas de libra, ó sea 1 libra, 3 panillas, 960 milésimas de panilla.
La fanega de áridos . .	55 litros, 501 mililitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 864849 millonésimas de cuartillo, ó sea 3 ochavillos, 459 milésimas de ochavillo.
La fanega superficial de 9216 varas cuadradas, llamada de marco real. .	64 áreas, 39 centiáreas, 0 metros cuadrados, 56 decímetros cuadrados, 56 decímetros id., 17 centímetros id.
Una área.	143 varas cuadradas, 115329 millonésimas de vara id.

MEDIDAS Y PESAS REMITIDAS DE LAS PROVINCIAS.

ÁLAVA.

La vara	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La cántara. . . vale	16 litros, 365 mililitros.
Un litro	1 cuartillo, 3 copas, 822 milésimas de copa.
La media fanega de áridos.	27 litros, 81 centilitros.

Un litro	0 cuartillos, 863 milésimas de cuartillo.
La fanega de tierra de 660 estadales de 49 pies cuadrados. . .	25 áreas, 10 centiáreas, 79 decímetros cuadrados, 56 centímetros id.
Una área. . . .	26 estadales, 14 pies cuadrados, 038 milésimas de pié id.

ALBACETE.

La vara. . . . vale	0 metros, 837 milímetros.
Un metro. . . .	1 vara, 0 pies, 7 pulgadas, 0 líneas, 129 milésimas de id.
La libra . . .	0 kilógramos, 458 gramos.
Un kilógramo. . .	2 libras, 2 onzas, 14 adarmes, 952 milésimas de adarme.
La media arroba para líquidos	6 litros, 365 mililitros.
Un litro	2 cuartillos, 514 milésimas de cuartillo.
La media fanega de áridos.	28 litros, 325 mililitros.
Un litro de grano. . .	0 cuartillos, 847 milésimas de cuartillo.
La fanega de tierra de 10,000 varas cuadradas.	70 áreas, 05 centiáreas, 69 decímetros cuadrados.
Una área. . . .	142 varas cuadradas, 6 pies id., 670 milésimas de pié id.

ALICANTE.

La vara . . . vale.	0 metros, 912 milímetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 3 pulgadas, 5 líneas, 684 milésimas de línea.

La libra . . . . . 0 kilógramos, 533 gramos.
Un kilógramo. . . . 1 libra, 14 onzas, 0 adarme, 300 milésimas de adarme.

La medida de libra para aceite . . . . 0 litros, 60 centilitros.
Un litro de aceite. . . 1 libra, 2 cuarterones, 667 milésimas de cuarteron.

El cántaro. . . . . 11 litros, 55 centilitros.
Un litro . . . . . 1 micheta, 385 milésimas de micheta.

La barchilla . . . . 20 litros, 775 mililitros.
Un litro de grano. . . 0 cuartillas, 770 milésimas de cuartilla.

El jornal de tierra de 5,776 varas cuadradas . . 48 áreas, 04 centiáreas, 15 decímetros cuadrados, 33 centímetros id.
Una área. . . . 120 varas cuadradas, 2 pies id., 064 milésimas de idem.

ALMERÍA.

La vara . . . vale. 0 metros, 833 milímetros.
Un metro. . . . . 1 vara, 0 pies, 7 pulgadas, 2 líneas, 607 milésimas de línea.
La libra . . . . . Es la de Castilla.
La media arroba para líquidos . . . . . 8 litros, 18 centilitros.
Un litro . . . . . 2 cuartillos, 200 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos. 27 litros, 531 mililitros.
Un litro de grano . . . 0 cuartillos, 872 milésimas de cuartillo.

La tahulla de 1,600 varas castellanas cuadradas para las tierras de riego. 11 áreas, 18 centiáreas, 23 decímetros cuadrados, 36 centímetros id.

La fanega de 9,216 varas castellanas cuadradas para las tierras de secano. Véase de Castilla.

ÁVILA.

La vara . . . . Es la de Castilla.
La libra . . . . . . Idem.
La media cántara. vale. 7 litros, 96 centilitros.
Un litro. . . . 2 cuartillos, 010 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos . . . 28 litros, 20 centilitros.
Un litro de grano. . . 0 cuartillos, 851 milésimas de cuartillo.
La fanega de tierra de 5,625 varas cuadradas . . 39 áreas, 30 centiáreas, 39 decímetros cuadrados, 66 centímetros id.
La fanega de puño de 6,000 varas cuadradas . . . 41 áreas, 92 centiáreas, 42 decímetros cuadrados, 30 centímetros id.
La aranzada de viña de 6,400 varas cuadradas. . 44 áreas, 71 centiáreas, 91 decímetros cuadrados, 79 centímetros id.
La huebra de 3,200 varas cuadradas . . . 22 áreas, 35 centiáreas, 95 decímetros cuadrados, 89 centímetros id.
La peonada de prado de 5,600 varas cuadradas. . 39 áreas, 12 centiáreas, 92 decímetros cuadrados, 81 centímetros id.
Una área. . . . Véase Castilla.

BADAJOZ.

La vara	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La media arroba para aceite vale.	6 litros, 21 centilitros.
Un litro	4 cuartillos, 831 milésimas de cuartillo.
La media arroba para los demas líquidos. . .	8 litros, 21 centilitros.
Un litro	2 cuartillos, 314 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 92 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 860 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 9,216 varas cuadradas. .	Véase Castilla.

BALEARES.

PALMA.

La media cana. . vale	0 metros, 782 milímetros.
Un metro. . . .	5 palmos, 115 milésimas de palmo.
La libra	0 kilógramos, 407 gramos.
Un kilógramo. . . .	2 libras, 5 onzas, 484 milésimas de onza.
La mesura para aceite. . .	16 litros, 58 centilitros.
Un litro de aceite. . .	2 libras, 2 onzas, 055 milésimas de onza.
La cuarta para vino . .	0 litros, 78 centilitros.
Un litro de vino. . .	1 cuarta, 282 milésimas de id.
La libra para aguardiente.	0 litros, 41 centilitros.
Un litro de aguardiente. .	2 libras, 439 milésimas de id.

La media cuartera para áridos	35 litros, 17 centilitros.
Un litro de grano. . .	0 almudes, 512 milésimas de almud.
El destre mallorquin lineal.	4 metros, 214 milímetros.
El destre mallorquin superficial	17 metros cuadrados, 75 decímetros id., 78 centímetros idem.
La cuarterada. . . .	71 áreas, 03 centiáreas, 11 decímetros cuadrados, 84 centímetros id.
Una área.	5 destres superficiales, 16 varas cuadradas de Búrgos, 0 pies id., 365 milésimas de pié id.

BARCELONA.

La cana . . . vale	1 metro, 555 milímetros.
Un metro.	5 palmos, 145 milésimas de palmo.
La libra	0 kilógramos, 400 gramos.
Un kilógramo. . . .	2 libras, 6 onzas.
La libra medicinal . .	0 kilógramos, 300 gramos.
Un kilógramo. . . .	3 libras, 4 onzas.
El barrilon	30 litros, 35 centilitros.
Un litro	1 mitadella, 054 milésimas de mitadella.
El cuartan de aceite . .	4 litros, 15 centilitros.
Un litro	3 cuartas, 855 milésimas de cuarta.
La media cuartera para áridos	34 litros, 759 mililitros.
Un litro de grano. . .	0 cuartanes, 175 milésimas de cuartan.
La mojada superficial de 2,025 canas superficiales.	48 áreas, 96 centiáreas, 50 de-

cimetros cuadrados, 06 centimetros id.

Una área.	41 canas cuadradas, 22 palmos id., 788 milésimas de id.

BÚRGOS.

La vara	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La media cántara. vale	7 litros, 05 centilitros.
Un litro	2 cuartillos, 270 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos	27 litros, 17 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 883 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial.	Véase Castilla.

CACERES.

La vara	Es la de Castilla.
La libra vale	0 kilógramos, 456 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 3 onzas, 1 adarme, 404 milésimas de adarme.
El medio cuarto para vino.	1 litro, 73 centilitros.
Un litro de vino.	2 cuartillos, 601 milésimas de cuartillo.
El medio cuarto para aceite	1 litro, 60 centilitros.
Un litro de aceite.	2 panillas, 187 milésimas de panilla.
La media fanega para áridos.	26 litros, 88 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 893 milésimas de cuartillo.
La fanega de 24 estadales, ó sea 96 varas de lado.	Véase Castilla.

CADIZ.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media arroba para vino, vale.	7 litros, 922 mililitros.
Un litro de vino.	2 cuartillos, 020 milésimas de cuartillo.
La media arroba para aceite.	6 litros, 26 centilitros.
Un litro de aceite.	1 libra, 3 panillas, 987 milésimas de idem.
La media fanega para áridos.	27 litros, 272 mililitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 880 milésimas de idem.
La fanega superficial.	Es la de Castilla.

CANARIAS.

La vara. vale	0 metros, 842 milímetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 6 pulgadas, 9 líneas, 064 milésimas de líneas.
La libra.	Es la de Castilla.
La arroba de líquiddos de Santa Cruz de Tenerife.	5 litros, 08 centilitros.
Un litro.	0 cuartillos, 984 milésimas de cuartillo.
La arroba de líquidos de la ciudad de Palmas.	5 litros, 34 centilitros.
Un litro.	0 cuartillos, 936 milésimas de cuartillo.
El cuartillo de la Guia de Canarias.	0 litros, 995 mililitros.
Un litro.	1 cuartillo, 005 imlésimas de cuartillo.
El cuartillo del arrecife de Lanzarote.	2 litros, 46 centilitros.
Un litro.	0 cuartillos, 407 milésimas de cuartillo.
La media fanega de áridos de Santa Cruz de Tenerife.	31 litros, 33 centilitros.

Un litro de grano.	0 cuartillos, 766 milésimas de cuartillo.
El medio almud de la ciudad de las Palmas. . . .	2 litros, 75 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 almudes, 182 milésimas de almud.
El medio almud de la Guia de Canarias.	2 litros, 84 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 almudes, 176 milésimas de almud.
La fanega superficial de 7511 $^1/_9$ varas castellanas.	52 áreas, 48 centiáreas, 29 decímetros cuadrados, 25 centímetros id.
Una área.	30 brazas, 486 milésimas de braza.

CASTELLON.

La vara. . . . . . vale	0 metros, 906 milímetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 3 pulgadas, 8 líneas, 821 milésimas de línea, ó bien 1 vara, 0 palmos, 1 cuarta, 660 milésimas de cuarta.
La libra.	0 kilógramos, 358 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 9 onzas, 2 cuartas, 0 adarmes, 313 milésimas de adarme.
El cántaro para los líquidos, exceptuando el aceite. .	11 litros, 27 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 420 milésimas de idem.
La arroba para aceite. . .	12 litros, 14 centilitros.
Un litro de aceite. . . .	2 libras, 2 cuartas, 544 milésimas de cuarta.
La barchilla.	16 litros, 60 centilitros.
Un litro de grano.	0 celemines, 241 milésimas de celemin.
La fanegada superficial de 200 brazas reales. . . .	8 áreas, 31 centiáreas, 9 decímetros cuadrados, 64 centímetros id.

Una área.	24 brazas reales, 065 milésimas de braza.

CIUDAD-REAL.

La vara. . . . vale	0 metros, 839 milímetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 6 pulgadas, 10 líneas, 899 milésimas de línea.
La libra	Es la de Castilla.
La media arroba para líquidos, escepto el aceite. .	8 litros.
Un litro.	2 cuartillos.
La media arroba para aceite.	6 litros, 22 centilitros.
Un litro de aceite. . . .	0 arrobas, 080 milésimas de arroba.
La media fanega para áridos.	27 litros, 29 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 879 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial. . .	Véase Castilla.

CÓRDOBA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La arroba para medir líquidos vale. . .	16 litros, 31 centilitros.
Un litro	1 cuartillo, 962 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 60 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 870 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 8760 $^5/_{12}$ varas cuadradas.	61 áreas, 21 centiáreas, 22 decímetros cuadrados, 87 centímetros id.
La aranzada de 5256 $^1/_4$ varas cuadradas.	36 áreas, 72 centiáreas, 73 decímetros cuadrados, 72 centímetros id.
Una área	Véase Castilla.

CORUÑA.

La vara.	Véase Madrid.
La libra. . . . vale	0 kilógramos, 575 gramos.
Un kilógramo.	1 libra, 14 onzas, 783 milésimas de onza.
El ferrado de trigo. . . .	16 litros, 15 centílitros.
Un litro de trigo.	1 cuartillo, 486 milésimas de cuartillo.
El ferrado de maiz. . . .	20 litros, 87 centílitros.
Un litro de maiz. . . .	1 cuartillo, 150 milésimas de cuartillo.
La cántara de vino. . . .	15 litros, 58 centílitros.
Un litro de vino. . . .	2 cuartillos, 182 milésimas de cuartillo.
La cántara de aguardiente. .	16 litros, 43 centílitros.
Un litro de aguardiente. . .	2 cuartillos, 069 milésimas de cuartillo.
La arroba de aceite . . .	12 litros, 43 centílitros.
Un litro de aceite	2 cuartillos, 011 milésimas de id.
El ferrado superficial de 900 varas cuadradas. . . .	6 áreas, 39 centiáreas, 58 decímetros cuadrados, 41 centímetros id.
El ferrado superficial de 625 varas cuadradas. . . .	4 áreas, 44 centiáreas, 15 decímetros cuadrados, 56 centímetros id.
Una área.	140 varas cuadradas, 6 pies id., 448 milésimas de pié id.

CUENCA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La media arroba para líquidos vale	7 litros, 88 centílitros.
Un litro	2 cuartillos, 030 milésimas de cuartillo.

La media fanega para áridos.	27 litros, 10 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 886 milésimas de cuartillo.
Para la medida superficial. .	Véase Castilla.

GERONA.

La cana. . . . . vale	1 metro, 559 milimetros.
Un metro.	5 palmos, 0 cuartos, 526 milésimas de cuarto.
La libra.	0 kilógramos, 400 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 6 onzas.
El mallal para vino. . . .	15 litros, 48 centilitros.
Un litro.	1 porron, 034 milésimas de id.
Un cuartan para áridos. . .	18 litros, 08 centilitros.
Un litro.	0 mesurones, 332 milésimas de mesuron.
La vesana de tierra de 900 canas cuadradas.	21 áreas, 87 centiáreas, 43 decimetros cuadrados, 29 centimetros id.
Una área.	41 canas cuadradas, 9 palmos id., 224 milésimas de palmo.

GRANADA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media arroba para líquidos.	Véase Badajoz.
La media fanega para áridos vale.	27 litros, 35 centilitros.
Un litro.	0 cuartillos, 878 milésimas de cuartillo.
Para la medida superficial. .	Véase Castilla.

GUADALAJARA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media arroba para líquidos.	Véase Badajoz.
La media arroba para aceite vale.	6 litros, 35 centilitros.

Un litro de aceite. . . . 1 libra, 3 panillas, 874 milésimas de panilla.
La media fanega para áridos. 27 litros, 40 centilitros.
Un litro de grano. . . . 0 cuartillos, 876 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 4444 $^4|_9$ varas cuadradas. 31 áreas, 05 centiáreas 49 decímetros cuadrados, 85 centímetros id.
Una área. . . . . . . Véase Castilla.

GUIPUZCOA.

La vara. . . . . . . Véase Albacete.
La libra. . . . . vale 0 kilógramos, 492 gramos.
Un kilógramo. . . . . 2 libras, 0 onzas, 553 milésimas de onza (1).
La media azumbre. . . . 1 litro, 26 centilitros.
Un litro. . . . . . . 1 cuartillo, 587 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos. 27 litros, 65 centilitros.
Un litro de grano. . . . 1 chilla, 157 milesimas de chilla.
La fanega superficial de 4900 varas cuadradas. . . . 34 áreas, 32 centiáreas, 78 decímetros cuadrados, 81 centimetros id.
Una área. . . . . . . Véase Albacete.

HUELVA.

La vara. . . . . Es la de Castilla.
La libra. . . . . . . Idem.
La media arroba para liquidos vale. . . . . . . 7 litros, 89 centilitros.
Un litro. . . . . . . 1 jarro, 014 milésimas de jarro
La media fanega para áridos. Véase Almería.
La fanega superficial de 5280 varas cuadradas. . . . 36 áreas, 89 centiáreas, 33 decímetros cuadrados, 23 centimetros id.
Una área. . . . . . . Véase Castilla.

(1) Se ha calculado con la libra dividida en 17 onzas.

HUESCA.

La vara. . . . . . vale 0 metros, 772 milimetros.
Un metro. . . . . . . 1 vara, 0 tercias, 886 milésimas de tercia.
La libra. . . . . . . 0 kilógramos, 351 gramos.
Un kilógramo . . . . . 2 libras, 10 onzas, 3 arienzos. 009 milésimas de arienzo.
El cántaro. . . . . . . 9 litros, 98 centilitros.
Un litro. . . . . . . 9 jarros, 802 milésimas de id.
La medida de libra para el mudeo de aguardiente. . 0 litros, 36 centílitros.
Un litro de aguardiente. . 2 libras, 778 milésimas de libra.
La medida de libra para aceite. 0 litros, 37 centilitros.
Un litro de aceite. . . . 2 libras, 705 milésimas de libra.
La fanega para áridos. . . 22 litros, 46 centilitros.
Un litro de de grano. . . 0 almudes, 534 milésimas de almud.
La fanega superficial de 1200 varas cuadradas. . . . 7 áreas, 15 centiáreas, 18 decímetros cuadrados, 08 centimetros id.
Una área. . . . . . . 1 almud, 67 varas cuadradas, 7 tercias id., 108 milésimas de tercia id.

JAEN.

La vara. . . . . Véase Ciudad-Real.
La libra . . . . Es la de Castilla.
La medida de media arroba para vino . . . vale 8 litros, 02 centílitros.
Un litro . . . . . . 1 cuartillo, 995 milésimas de id.
La medida de media arroba para aceite . . . . 7 litros, 12 centilitros.
Un litro de aceite. . . . 1 libra, 896 milésimas de libra.
La media fanega para áridos. 27 litros, 37 centílitros.

Un litro de grano.	0 cuartillos, 877 milésimas de id.
La fanega superficial de 8963 varas castellanas cuadradas.	62 áreas, 62 centiáreas, 78 decimetros cuadrados, 12 centimetros id.
Una área.	Véase Castilla.

LEON.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media cántara . . vale	7 litros, 092 centílitros.
Un litro.	2 cuartillos. 020 milésimas de cuartillo.
La emina para áridos. . .	18 litros, 11 centílitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 883 milésimas de cuartillo.
La emina superficial de $1344^4/_9$ varas cuadradas para las tierras de secano. . . .	9 áreas. 39 centiáreas, 41 decimetros cuadrados, 33 centimetros id.
La emina superficial de $896^2/_9$ varas cuadradas para las tierras de regadio. . .	6 áreas, 26 centiáreas, 22 decimetros cuadrados, 38 centimetros id.
Una área.	Véase Castilla.

LÉRIDA.

La media cana. . . vale	0 metros, 778 milimetros.
Un metro.	5 palmos, 141 milésimas de palmo.
La libra.	0 kilógramos, 401 gramos.
Un kilógramo	2 libras, 5 onzas, 3 cuartas, 2 arxens, 803 milésimas de arxens.
El cántaro de vino. . . .	11 litros, 38 centilitros.
Un litro.	1 porron, 054 milésimas de id.

La medida de tres cuartanes para áraidos.	18 litros, 34 centilitros.
Un litro de grano. . . .	1 picotin, 309 milésimas de id.
El jornal superficial de 1800 canas cuadradas. . . .	43 áreas, 58 centiáreas, 04 decimetros cuadrados, 48 centimetros id.
Una área.	41 canas cuadradas, 19 palmos id., 387 milésimas de palmo id.

LOGROÑO.

La vara.	Véase Albacete.
La libra.	Es la de Castilla.
La cántara. . . . vale	16 litros, 04 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 995 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 47 centilitros.
Un litro.	0 cuartillo, 874 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 2722 varas castellanas cuadradas.	19 áreas, 01 centiárea, 96 decimetros cuadrados 26 centimetros id.
Una área.	Véase Albacete.

LUGO.

La vara. . . . . vale	0 metros, 855 milimetros.
Un metro.	1 vara, 0 tercias, 6 pulgadas 105 milésimas de pulgada.
La libra.	0 kilógramos, 573 gramos.
Un kilógramo.	1 libra, 2 cuarterones, 981 milésimas de cuarteron.
El cuartillo para liquidos. .	0 litros, 47 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 128 milésimas de cuartillo.
El ferrado para áridos. . .	13 litros, 13 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 ferrado, 076 milésimas de ferrado.

El ferrado superficial de 625 varas castellanas cuadradas.	4 área, 36 centiáreas, 71 decímetros cuadrados, 07 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

MADRID.

La vara. . . . . vale	0 metros, 843 milímetros.
Un metro..	1 vara, 0 pies, 6 pulgadas, 8 líneas, 456 milésimas de id.
La libra.	Es la de Castilla.
La media arroba para líquidos vale.	8 litros, 15 centilitros.
Un litro..	1 cuartillo, 963 milésimas de cuartiilo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 67 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 867 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial llamada marco de Madrid de 4900 varas cuadradas de Búrgos.	34 áreas, 23 centiáreas, 81 decímetros cuadrados, 21 centímetro id.
Una área.	Véase Castilla.
Nota. Si las 4900 varas cuadradas de que consta la fanega se miden con la vara de Madrid, la fanega.	34 áreas, 82 centiáreas, 18 decímetros cuadrados, 01 centímetro id.
En este caso una área. . .	140 varas cuadradas, 6 pies id., 448 milésimas de id.

MÁLAGA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media arroba para líquidos vale.	8 litros, 33 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 921 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	26 litros, 97 centilitros.

Un litro de grano.	0 cuartillos, 890 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 8640 varas cuadradas. . . .	60 áreas, 37 centiáreas, 08 decímetros cuadrados, 91 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

MURCIA.

La vara. . , ...	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media arroba para medir vino. . . . . . vale	7 litros, 80 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 051 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 64 centilitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 868 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 9600 varas cuadradas. . . .	67 áreas, 07 centiáreas, 87 decímetros cuadrados, 68 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

ORENSE.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra. . . . . . vale	0 kilógramos, 574 gramos.
Un kilógramo.	1 libra, 14 onzas, 843 milésimas de onza.
La cántara.	15 litros, 96 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 256 milésimas de cuartillo.
El ferrado para medir grano.	13 litros, 88 centilitros.
Un litro.	1 copelo, 729 milésimas de copelo.
El ferrado colmado para medir maiz.	18 litros, 79 centilitros.
Un litro.	1 copelo, 277 milésimas de copelo.

El ferrado superficial de 900 varas castellanas cuadradas.	6 áreas, 28 centiáreas, 86 decímetros cuadrados, 35 centímetros id.
La cavadura de 625 varas castellanas cuadradas. . . .	4 áreas, 36 centiáreas, 71 decímetros cuadrados, 07 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

OVIEDO.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La cántara. . . . . vale	18 litros, 41 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 738 milésimas de cuartillo.
La media fanega asturiana para áridos.	37 litros, 07 centilitros.
Un litro de grano. . . .	1 cuartillo, 726 milésimas de cuartillo.
El dia de bueyes, ó sean 1800 varas cuadradas. . . .	12 áreas, 57 centiáreas, 72 decímetros cuadrados, 69 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

PALENCIA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media cártara.	Véase Cuenca.
La media arroba para aceite vale.	6 litros, 12 centilitros.
Un litro de aceite.	2 libras, 042 milésimas de libra.
La media fanega para áridos.	Es la de Castilla.
La obrada de tierra de 7704 $^{1}/_{6}$ varas cuadradas . . .	53 áreas, 83 centiáreas, 18 decímetros cuadrados, 76 centímetros id.

Una área.	Véase Castilla.

PAMPLONA.

La vara. . . . . . . vale	0 metros, 785 milimetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 9 pulgadas, 10 líneas, 318 milésimas de línea. . . . .
La libra.	0 kilógramos, 372 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 8 onzas, 2 ochavas, 064 milésimas de ochava.
El cántaro.	11 litros, 77 centilitros.
Un litro.	1 pinta, 1 cuartillo, 438 milésimas de cuartillo.
La libra para medir aceite. .	0 litros, 41 centilitros.
Un litro de aceite.	2 libras, 1 cuarteron, 756 milésimas de cuarteron.
El robo para áridos. . . .	28 litros, 13 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 almudes, 569 milésimas de almud.
La robado superficial de 1458 varas cuadradas.	8 áreas, 98 centiáreas, 45 decímetros cuadrados, 60 centímetros id.
Una área	162 varas cuadradas, 2 piés id., 506 milésimas de pié id. . .

PONTEVEDRA.

La vara	Es la de Castilla.
La libra . . . . . . vale	0 kilógramos, 579 gramos.
Un kilógramo	1 libra, 14 onzas, 8 adarmes, 677 milésimas de adarme.
El medio cañado para líquidos	16 litros, 35 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 080 milésimas de cuartillo.
El ferrado para medir trigo. .	15 litros, 58 centilitros.
Un litro de trigo	0 concas, 770 milésimas de id.
El ferrado para medir maiz. .	20 litros, 86 centilitros.
Un litro de maiz.	0 concas, 575 milésimas de id.

El ferrado de sembradura de 900 varas cuadradas . .	Véase Orense.
Una área	Véase Castilla.

SALAMANCA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
Un medio cántaro. . . vale	7 litros, 99 centílitros.
Un litro.	2 cuartillos, 003 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos .	Véase Ciudad-Real.
La fanega de tierra de 9216 varas cuadradas . .	Véase Castilla.

SANTANDER.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media cántara . . vale	7 litros, 90 centilitros.
Un litro	2 cuartillos, 025 milésimas de id.
La media fanega para áridos.	27 litros, 42 centilitros.
Un litro de grano	0 cuartillos, 875 milésimas de id.
Para la unidad de medida superficial	Véase Castilla.

SEGOVIA.

La vara.	Véase Albacete.
La libra	Es la de Castilla.
La media arroba para líquidos vale . . .	8 litros.
Un litro	2 cuartillos.
La media fanega para áridos.	27 litros, 30 centílitros.
Un litro de grano . . .	0 cuartillos, 879 milésimas de cuartillo.

La obrada de tierra de 400 estadales cuadrados . .	39 áreas, 30 centiáreas, 39 decímetros cuadrados, 66 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

SEVILLA.

La vara	Es la de Castilla.
La libra. . . .	Idem.
La arroba para liquidos. vale	15 litros, 66 centílitros.
Un litro	2 cuartillos, 043 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 35 centílitros.
Un litro de grano	0 cuartillos, 878 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 8507 $^{15}/_{16}$ varas castellanas cuadradas.	59 áreas, 44 centiáreas, 72 decímetros cuadrados, 48 centímetros id.
La aranzada de 6806 $^{1}/_{4}$ varas castellanas cuadradas.	47 áreas, 55 centiáreas, 77 decímetros cuadrados, 99 centímetros id.
Una área	Véase Castilla.

SORIA.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra	Idem.
La media cántara	Véase Santander.
La media fanega para áridos vale.	27 litros, 57 centílitros.
Un litro de grano.	0 cuartillos, 871 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 3200 varas cuadradas. . . .	22 áreas, 35 centiáreas, 95 decímetros cuadrados, 89 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

TARRAGONA.

La media cana. . . . vale	0 metros, 780 milímetros.
Un metro.	5 palmos, 128 milésimas de id.
La libra.	Es la de Gerona.
La armiña para líquidos. . .	34 litros, 66 centilitros.
Un litro.	0 porrones, 923 milésimas de porron.
La sinquena para aceite. . .	20 litros, 65 centilitros.
Un litro de aceite. . . . . ,	0 cuartales; 242 milésimas de cuartal.
La media cuartera para áridos.	35 litros, 40 centilitros.
Un litro de grano.	0 cortanes, 169 milèsimas de cortan.
La cana de rey superficial de 2500 canas cuadradas. . .	60 áreas, 84 centiáreas.
Una área.	41 canas cuadradas, 5 palmos, 849 milésimas de palmo.

TERUEL.

La vara. . . . . vale	0 metros, 768 milímetros.
Un metro.	1 vara, 302 milésimas de vara.
La libra.	0 kilógramos, 367 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 725 milésimas de id.
El medio cántaro.	10 litros, 96 centilitros.
Un litro.	0 cántaros, 046 milésimas de cántaro.
La fanega para áridos. . . .	21 litros, 40 centilitros.
Un litro de grano.	0 fanegas, 047 milésimas de idem.
La fanega de tierra de 1600 varas castellanas cuadradas.	11 áreas, 17 centiáreas, 97 decímetros cuadrados, 95 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

TOLEDO.

La vara.	Véase Albacete.

La libra.	Es la de Castilla.
La media cántara. . . . vale	8 litros, 12 centilitros.
Un litro. . , ...	1 cuartillo, 970 milésimas de cuartillo.
La media arroba para medir aceite.	6 litros, 25 centilitros.
Un litro.	2 libras.
La media fanega para áridos.	Es la de Castilla.
La fanega superficial de 400 estadales, ó sean 5377 $^{7}/_{9}$ varas castellanas cuadradas.	37 áreas, 57 centiáreas, 65 decímetros cuadrados, 32 centímetros id.
La fanega superficial, de 500 estadales, ó sean 6722 $^{2}/_{9}$ varas castellanas cuadradas.	46 áreas, 97 centiáreas 06 decímetros cuadrados, 65 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

VALENCIA.

La vara.	Véase Castellon.
La libra. . . . . . . vale	0 kilógramos, 355 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 9 onzas, 3 cuartas, 211 milésimas de cuarta.
El cántaro de vino.	10 litros, 77 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 486 milésimas de cuartillo.
La arroba de aceite. . . .	11 litros 93 centilitros.
Un litro de aceite.	0 azumbres, 335 milésimas de azumbre.
La barchilla para áridos. .	16 litros, 75 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 955 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 1012 $^{1}/_{2}$ varas valencianas. . .	Véase Castellon.

VALLADOLID.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra.	Idem.
La media cántara. . . vale	7 litros, 82 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 046 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 39 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 876 milesimas de cuartillo.
La obrada superficial de 600 estadales, ó sean 6666 $^2/_3$ varas cuadradas. . . .	46 áreas, 58 centiàreas, 24 decimetros cuadrados, 78 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

Vizcaya.

BILBAO.

La vara.	Es la de Castilla.
La libra. . . . . vale	0 kilógramos, 488 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 0 onzas, 13 adarmes, 377 milésimas de adarme.
La media azumbre. . . .	1 litro, 11 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 802 milésimas de idem.
La media arroba de aceite. .	6 litros, 74 centilitros.
Un litro de aceite. . . .	1 libra, 3 cuarterones, 0 ochavas, 837 milésimas de id.
La media fanega para áridos.	28 litros, 46 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 celemines, 211 milésimas de celemin.
La peonada superficial de 544 $^4/_9$ varas cuadradas. . .	5 áreas, 80 centiáreas, 42 decímetros cuadrados, 36 centimetros id.
Una área.	Véase Castilla.

ZAMORA.

La vara.	Es la de Castilla
La libra.	Idem.
El medio cántaro. . . vale	7 litros, 98 centilitros.
Un litro.	2 cuartillos, 005 milésimas de cuartillo.
La media fanega para áridos.	27 litros, 64 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 cuartillos, 868 milésimas de cuartillo.
La fanega superficial de 4800 varas cuadradas. . . .	33 áreas, 53 centiáreas, 93 decimetros cuadrados, 84 centímetros id.
Una área.	Véase Castilla.

ZARAGOZA.

La vara. . . . . . vale	0 metros, 772 milimetros.
Un metro.	1 vara, 0 pies, 10 pulgadas, 7 líneas, 585 milésimas de idem.
La libra.	0 kilógramos, 350 gramos.
Un kilógramo.	2 libras, 10 onzas, 1 cuarto, 0 adarmes, 571 milésimas de adarme.
El cántaro de vino. . . .	9 litros, 91 centilitros.
Un litro.	1 cuartillo, 615 milésimas de cuartillo.
La arroba para medir aceite,	13 litros, 93 centilitros.
Un litro de aceite. . . .	2 libras, 584 milésimas de id.
La arroba para medir aguardiente.	13 litros, 33 centilitros.
Un litro de aguardiente. .	2 libras, 701 milésimas de id.
La fanega para áridos. . .	22 litros, 42 centilitros.
Un litro de grano. . . .	0 almudes, 535 milésimas de almud.
El cuartal superficial de 400 varas aragonesas cuadradas.	2 áreas, 38 centiáreas, 39 decimetros cuadrados, 36 centimetros id.

Una área. . . . . 0 cuartales, 1 almud, 67 varas cuadradas, 790 milésimas de vara id.

Madrid 13 de noviembre de 1852.=*Vicente Sancho.*=*Juan Subercase.*=*Alejandro Olivan.*=*C. Bordiú.*=*Vicente Vazquez Queipo.*=*Rafael Escriche*, secretario.

Nota. Las correspondencias de las pesas y medidas de las provincias publicadas por real órden de 28 de junio de 1851, son las mismas que comprenden estas tablas, con solo algunas pequeñas diferencias desde la tercera cifra decimal en adelante en las medidas superficiales que tienen por base la vara de Burgos, producida por la mayor exactitud que proporcina el cálculo de estas medidas, tomando la relacion de dicha vara de Búrgos al metro con seis cifras decimales que se dan ahora en lugar de solas tres que se dieron en las primeras tablas.

Tambien se ha cuidado de aumentar por aproximacion una unidad á la última cifra decimal en todos los casos en que ha sido necesario despreciar una resta mayor que la mitad de dicha unidad, lo que dejó de hacerse en algun caso en las tablas anteriores. Madrid 9 de diciembre de 1852.—*Bertran de Lis.*

REDUCCION DE LAS ANTIGUAS MEDIDAS LEGALES DE CASTILLA Á LA DEL SISTEMA MÉTRICO, Y AL CONTRARIO.

Medidas lineales.

Reduccion de pies y varas á metros.

Pies.	Metros.	Varas.	Metros.
1 —	0,279	1 —	0,836
2 —	0,557	2 —	1,672
3 —	0,836	3 —	2,508
4 —	1,115	4 —	3,344
5 —	1,393	5 —	4,180
6 —	1,672	6 —	5,015
7 —	1,950	7 —	5,851
8 —	2,229	8 —	6,687
9 —	2,508	9 —	7,523
10 —	2,786	10 —	8,359
15 —	4,179	15 —	12,539
20 —	5,573	20 —	16,718
25 —	6,966	25 —	20,898
30 —	8,359	30 —	25,077
35 —	9,752	35 —	29,257
40 —	11,145	40 —	33,436
45 —	12,538	45 —	37,616
50 —	13,932	50 —	41,795
55 —	15,325	55 —	45,975
60 —	16,718	60 —	50,154
65 —	18,111	65 —	54,334
70 —	19,504	70 —	58,513
75 —	20,897	75 —	62,693
80 —	22,291	80 —	66,872
85 —	23,684	85 —	71,051
90 —	25,077	90 —	75,232
95 —	26.470	95 —	79,411
100 —	27,864	100 —	83,591

Reduccion de metros á varas y pies.

Metros.	Varas.	Pies.
1	1,196	3,589
2	2,393	7,178
3	3,589	10,767
4	4,785	14,356
5	5,982	17,945
6	7,178	21,534
7	8,374	25,124
8	9,570	28,711
9	10,767	32,300
10	11,963	35,889
15	17,945	53,834
20	23,936	71,778
25	29,908	88,723
30	35,889	107,668
35	41,870	125,612
40	47,852	143,557
45	53,833	161,501
50	59,815	179,446
55	65,797	197,390
60	71,778	215,335
65	77,760	233,279
70	83,741	251,224
75	89,723	269,179
80	95,704	287,114
85	101,686	305,059
90	107,668	323,033
95	113,649	340,948
100	119,631	358,892

Medidas de capacidad para áridos.

Reduccion de cuartillos y fanegas á litros y hectolitros.

Cuartillos.	Litros.
1	1,156
2	2,313
3	3,469
4	4,625
Celemines.	—
1	4.625
2	9,250
3	13,875
4	18,500
5	23,125
6	27,750
7	32,375
8	37,000
9	41,625
10	46,250
11	50,875
12	55,501

Faneg.	Hectolitros
1	0,555
2	1,110
3	1,665
4	2,220
5	2,775
7	3,885
9	4,995
10	5,550
20	11,100
30	16,650
40	22,200
50	27,750
60	33,300
70	38,850
80	44,400
90	49,950
100	55,500

Reduccion de litros y hectolitros á cuartillos, celemines y fanegas.

Litros.		Cuartillos.
1	—	0,865
2	—	1,729
3	—	2,594
4	—	3,459
5	—	4,324
		Celemines.
		—
5	—	1,081
6	—	1,297
7	—	1,513
8	—	1,729
9	—	1,945
10	—	2,162
11	—	2,378
12	—	2,594
13	—	2,810
14	—	3,026
15	—	3,243

Hectolitros.		Faneg.
1	—	1,802
2	—	3,603
3	—	5,405
4	—	7,207
5	—	9,009
7	—	12,612
9	—	16,216
10	—	18,018
20	—	36,036
30	—	54,054
40	—	72,072
50	—	90,090
60	—	108,108
70	—	126.126
80	—	144,144
90	—	162,162
100	—	180,180
	—	

Medidas de capacidad para líquidos en general.

Reduccion de copas, cuartillos, azumbres, cuartillas, cántaras ó arrobas y moyos, á litros y hectolitros.

Copas.	Litros.
1	0,126
2	0,252
3	0,378
4	0,504
Cuartillos.	
1	0,504
2	1,008
3	1,512
4	2,016
Azumbres.	
1	2,016
2	4,033
Cuartillas.	
1	4,033
2	8,066
3	12,100
4	16,133
Cántaras.	
1	16,133
2	32,266
3	48,399
4	64,532
5	80,665
6	96,798
7	112,931
8	129,063
9	145,196
16	258,127

Moyos.	Hectolitros
1	2,581
2	5,163
3	7,744
4	10,325
5	12,905
6	15,488
7	18,069
8	20,650
9	23,231
10	25,813
15	38,719
20	51,625
25	64,532
30	77,438
35	90,344
40	103,251
45	116,157
50	129,063
55	141,970
60	154,876
65	167,782
70	180,689
75	193,595
80	206,502
85	219,408
90	232,314
95	245,220
100	258,127

Reduccion de las medidas métricas, á cuartillos y cántaras ó arrobas

Litros.	Cuartillos.
1	1,984
2	3,967
3	5,951
4	7,934
5	9,918
7	13,885
9	17,852
10	19,835
Decalitros	Cántaras ó arrobas
1	0,619
2	1,239
3	1,859
4	2.479
5	3,099
6	3,719
7	4,338
8	4,958
9	5,578
Hectolitro.	
1	6.198
2	12,397
3	18,595
4	24,794
5	30,992
6	37,191
7	43,389
8	49,588
9	55,786
10	61,985

Medidas de capacidad para aceite.

Reduccion de panillas, libraa y arrobas, á litros y hectolitros.

Panillas.	Litros.
1	0,126
2	0,251
3	0,377
4	0,503
Libras.	
1	0,503
2	1,005
3	1,508
4	2,010
5	2,513
6	3,015
7	3,518
8	4,020
9	4.522
10	5,025
11	5,528
12	6,030
13	6,532
14	7,035
15	7,538
17	8,543
19	9,548
20	10,050
21	10,553
22	11,055
23	11,558
24	12.060
25	12,563

Arrobas.	Hectolitros.
1	0,126
2	0,251
3	0.377
4	0,503
5	0,628
6	0,754
7	0,879
8	1,005
9	1,131
10	1,256
15	1,884
20	2,513
25	3,141
30	3,769
35	4,397
40	5,025
45	5,653
50	6,282
55	6,910
60	7,538
65	8,166
70	8,794
75	9,422
80	10,050
85	10,678
90	11,307
95	11,935
100	12.563

Reduccion de litros y hectolitros, á libraa y arrobas,

Litros.	Libras.
1	1,990
2	3,980
3	5,970
4	7,960
5	9,950
7	13,930
9	17,909
10	19.900
50	99,499
100	198,997
Hectolitros.	**Arrobas·**
1	7,960
2	15,909
3	23,879
4	31,839
5	39,799
7	55,719
9	71,638
10	79,599
20	159,198
30	238,797
40	318,395
50	397,994
60	477,593
70	557,192
80	636,791
90	716,390
100	795,988

Medidas ponderales.

Reduccion de las antiguas á la del sistema métrico.

Grano.	Miligramos.
1	49,923
2	99,846
3	149,770
4	199,693
5	249,616
6	299,539
12	599,078
Tomines.	**Granos,**
1	0.599
2	1,198
3	1,797
Adars.	
1	1,797
2	3,594
Dracs.	
1	3,294
2	7,188
3	10,783
4	14,377
8	28,755
Onzas.	
1	28,755
2	57,511
3	86,267
5	143,779
7	201,290
8	230,046
16	460,093

Libras.	Kilógr.
1	0,460
2	0,920
3	1,380
4	1,840
5	2,300
6	2,761
7	3,221
8	3,681
9	4,141
10	4,601
15	6,901
20	9,202
25	11,502
Arrobs.	
1	11,502
2	23,004
3	34,506
4	46,009
5	57,511
6	69,013
7	80,516
8	92,018
9	103,520
10	115,023
20	230.046
30	345,069
40	460,093
50	575,116

Reduccion de las del sistema métrico á las antiguas.

Gramo.	Adarmes.
1	0,556
2	1,113
3	1,669
4	2,226
5	2,782
7	3,895
9	5,008
10	5,564
Decág.	**Onzas,**
1	0,348
2	0,695
3	1,043
4	1,391
5	1,739
7	2,434
9	3,129
10	3,478
Hectóg.	
1	3,478
2	6,695
3	10.433
4	13,910
5	17,388
6	20,865
7	24,343
8	27,820
9	31,298
10	34.780

Kilóg.	Libras.
1	2,173
2	4,346
3	6,520
4	8,693
5	10,867
6	13,040
7	15,214
8	17,387
9	19,561
10	21,734
15	32,601
20	43,469
25	54,336
30	65,204
35	76,071
40	86,938
45	97,805
50	108,673
55	119,540
60	130,408
65	141,275
70	152,143
75	163,010
80	173;877
85	184,744
90	195,612
95	206,479
100	217,347

CORRESPONDENCIA APROXIMADA

ENTRE LAS MEDIDAS DEL SISTEMA MÉTRICO Y LAS DE CASTILLA.

Medidas longitudinales.

El miriámetro equivale á 35,889 pies; esto es, una legua y poco mas de tres cuartos de otra.

El kilómetro á 3,589 pies; esto es, menos de un cuarto de legua.

El hectómetro á 359 pies.

El decámetro á 36 pies.

El metro á una vara, siete pulgadas y una línea.

El decímetro á cuatro pulgadas y cuatro líneas.

El centímetro á cinco líneas.

El milímetro á media línea.

Medidas de capacidad para áridos.

El hectolitro equivale á una fanega, nueve celemines y dos y medio cuartillos.

El decalitro á ocho y medio cuartillos.

El litro á nueve décimos de cuartillo, poco menos de un cuartillo.

Medidas de capacidad para vino.

El hectolitro equivale á seis cántaras, una azumbre, dos cuartillos y una copa.

El decalitro á cinco azumbres.

El litro á dos cuartillos.

El decilitro á ocho décimos de copa, poco menos de una copa.

Medidas de capacidad para aceite.

El hectolitro equivale á siete arrobas y veinte y cuatro libras.

El decalitro á diez y ocho libras y tres panillas.

El litro á dos libras.

El decilitro á ocho décimos de panilla, poco menos de una panilla.

Medidas ponderales.

La tonelada de peso equivale á ochenta y seis arrobas, veinte y tres libras, ocho onzas.

El quintal métrico á ocho arrobas, diez y seis libras y media.

El kilógramo á dos libras, dos onzas, doce adarmes y medio,

El gramo á veinte granos.

El decigramo á dos granos.

CORRESPONDENCIA APROXIMADA

ENTRE LAS MEDIDAS DE CASTILLA Y LAS DEL SISTEMA MÉTRICO.

Medidas longitudinales.

La legua equivale á cinco kilómetros y medio.

La vara á ocho decímetros y *cuatro centímetros y medio.*

El pié á dos decímetros y ocho centímetros.

La pulgada á dos centímetros y treinta y dos milímetros.

La línea á dos milímetros.

Medidas de capacidad para áridos.

El caiz equivale á seis hectolitros y sesenta y seis litros.

La fanega á cincuenta y cinco litros y medio.

El celemin á cuatro litros y poco mas de medio litro.
El cuartillo á un litro y decilitro y medio.

Medidas de capacidad para vino.

La arroba ó cántara equivale á diez y seis litros y trece centilitros.
La azumbre á dos litros y dos centilitros.
El cuartillo á medio litro.
La copa á trece centilitros.

Medidas de capacidad para aceite.

La arroba equivale á doce litros y cincuenta y seis centilitros.
La libra á medio litro.
La panilla á trece centilitros.

Medidas ponderales.

El quintal equivale á cuarenta y seis kilógramos.
La arroba á once kilógramos y medio.
La libra á medio kilógramo.
La onza á veinte y nueve gramos.
El adarme á dos gramos.
El tomin á poco mas de medio gramo.
El grano á cincuenta miligramos.

DOCUMENTOS OFICIALES.

Ley de pesas y medidas sancionada por S. M.

Doña Isabel II, por la gracia de Dios y la Constitucion de la monarquía española, Reina de las Españas, á todos los que la presente vieren y entendieren, sabed: que las Córtes han decretado y Nos sancionado lo siguiente:

Artículo 1.° En todos los dominios españoles habrá un solo sistema de medidas y pesas.

Artículo 2.° La unidad fundamental de este sistema será igual en longitud á la diezmillonésima parte del arco del meridiano que va del polo Norte al ecuador y se llamará *metro*.

Artículo 3.° El patron de este metro hecho de platina, que se guarda en el Conservatorio de Artes, y que fué calculado por don Gabriel Ciscar y construido y ajustado por el mismo y don Agustin Pedrayes, se declara patron prototipo y legal y con arreglo á él se ajustarán todos los del reino.

El Gobierno, sin embargo se asegurará prévia y nuevamente de la rigorosa exactitud del patron prototipo, el cual se conservará depositado en el archivo nacional de Simancas.

Artículo 4.° Su longitud á la temperatura cero grados centígrados es la legal y matemática del metro.

Artículo 5.° Este se divide en diez decímetros, cien centímetros y mil milímetros.

Artículo 6.° Las demas unidades de medida y peso se forman del metro, segun se ve en el adjunto cuadro.

Artículo 7.° El Gobierno procederá con toda diligencia á verificar la relacion de las medidas y pesas actualmente usadas en los diversos puntos de la monarquía con las nuevas, y publicará los equivalentes de aquellas en valores de estas. Al efecto recogerá noticias de todas las medidas y pesas provinciales y locales, con su reduccion á los tipos legales ó de Castilla, y para su comprobacion reunirá en Madrid una coleccion de las mismas. La publicacion de las equivalencias con el nuevo sistema métrico, tendrá lugar antes del primero de julio de mil ochocientos cincuenta y uno, y en Filipinas al fin del mismo año. Tambien deberá publicar una edicion legal y exacta de la Farmacopea española, en la que las dosis estén expresadas en valores de las nuevas unidades.

Articulo 8.° Todas las capitales de provincia y de partido recibirán del Gobierno, antes del primero de enero de mil ochocientos cincuenta y dos, una coleccion completa de los diferentes marcos de las nuevas pesas y medidas.

Las demas poblaciones las recibirán posteriormente y á la mayor brevedad posible.

Articulo 9.° Queda autorizada la circulacion y uso de patrones que serán el doble, la mitad, ó el cuarto de las unidades legales.

Articulo 10. Tan luego como se halle ejecutado en cuanto sea indispensable lo dispuesto en los articulos 7.° y 8.°, principiará el Gobierno á plantear el nuevo sistema por la clase de unidades, cuya adopcion ofrezca menos dificultad, extendiéndolo progresivamente á las demas unidades, de modo que antes de diez años quede establecido todo el sistema. En 1.° de enero de 1860 será este obligatorio para todos los españoles.

Articulo 11. En todas las escuelas públicas ó particulares en que se enseñe ó deba enseñarse la aritmética, ó cualquiera otra parte de las matemáticas, será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde 1.° de enero de 1852, quedando facultado el Gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no se cumpla con aquella obligacion.

Articulo 12. El mismo sistema legal y su nomenclatura científica deberán quedar establecidos en todas las dependencias del Estado y de la administracion provincial, inclusas las posesiones de Ultramar, para 1.° de enero de 1853.

Articulo 13. Desde la misma época serán tambien obligatorios en la redaccion de las sentencias de los tribunales y de los contratos públicos.

Articulo 14. Los contratos y estipulaciones particulares en que no intervenga escribano público, podrán hacerse válidamente en las unidades antiguas mientras no se declaren obligatorias las nuevas de su clase.

Articulo 15. Los nuevos tipos ó patrones llevarán grabado su nombre respectivo.

Articulo 16. El Gobierno publicará un reglamento determinando el tiempo, lugar y modo de procederse anualmente á la comprobacion de pesas y medidas, y los medios de vigilar y evitar los abusos.

Articulo 17. Los contraventores á esta ley quedan sujetos á las penas que señalan ó señalaren las leyes contra los que emplean pesas y medidas no contrastadas.

NUEVAS MEDIDAS Y PESAS LEGALES.

MEDIDAS LONGITUDINALES.

Unidad usual. El *metro* igual á la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano desde el polo del Norte al ecuador.

Sus múltiplos.

El decámetro igual diez metros.
El hectómetro igual cien metros.
El kilómetro igual mil metros.
El miriámetro igual diez mil metros.

Sus divisores.

El decimetro igual un décimo de metro.
El centímetro igual un centésimo de metro.
El milímetro igual un milésimo de metro.

MEDIDAS SUPERFICIALES.

Unidad usual. La *área* igual á un cuadrado de diez metros de lado, ó sea á cien metros cuadrados.

Sus múltiplos.

La hectárea ó cien áreas, igual á diez metros cuadrados.

Sus divisores.

La centiárea, ó el centésimo del área, igual al metro cuadrado.

MEDIDAS DE CAPACIDAD Y ARQUEO

PARA ÁRIDOS Y LIQUIDOS,

Unidad usual. El *litro* igual al volúmen del decímetro cúbico.

Sus múltiplos.

El decalitro igual diez litros.
El hectólitro igual cien litros.
El kilólitro igual mil litros ó una tonelada de arqueo.

Sus divisores.

El decilitro igual un décimo de litro.
El centilitro igual un centésimo de litro.

MEDIDAS CÚBICAS Ó DE SOLIDEZ.

El metro cúbico y sus divisiones.

MEDIDAS PONDERALES.

Unidad usual. El *kilógramo* ó mil gramos igual al peso en el vacio de un decímetro cúbico, ó sea un litro de agua destilada y á la temperatura de cuatro grados centigrados.

Sus múltiplos.

Quintal metrico igual cien mil gramos.
Tonelada de peso igual un millon igual al metro cúbico de agua.

Sus divisores.

Hectógramo igual cien gramos.
Decágramo igual diez gramos.
Gramo, peso de un centímetro cúbico, ó sea un mililitro de agua.
Decigramo igual un décimo de gramo.

Centigramo igual un centésimo de gramo.
Miligramo igual un milésimo de gramo.

Por tanto mandamos á todos los tribunales, justicias, gefes, gobernadores y demas autoridades asi civiles como militares y eclesiásticas de cualquiera dignidad, que guarden y hagan guardar, cumplir y ejecutar la presente ley en todas sus partes.

Dado en San Ildefonso á 19 de julio de 1849.—Está rubricado de la real mano.—El ministro de Comercio, Instruccion y Obras públicas, *Juan Bravo Murillo.*

Real decreto para el arreglo del sistema monetario.

Conformándome con lo propuesto por mi Ministro de Hacienda, de acuerdo con el Consejo de ministros, vengo en decretar lo siguente:

Articulo 1.° En todos los dominios españoles la unidad monetaria será el real, moneda efectiva de plata á la talla de 173 en el marco de 4608 granos.

Articulo 2.° La ley de todas las monedas de plata y oro que se acuñen en lo sucesivo será de 900 milésimos de fino y 100 de liga, con el permiso de dos milésmos en el oro y tres en la plata en mas ó en menos.

Articulo 3.° Las monedas que se acuñarán en adelante serán:

DE ORO.

El doblon de Isabel, valor de 100 reales, peso de 167 granos y talla de 27 $^{6}/_{10}$ en cada marco.

DE PLATA.

El duro, valor de 20 reales, talla de 8 $^{3}/_{4}$ en el marco.
El medio duro ó escudo, valor de 10 reales, á la talla de 17 $^{1}/_{2}$ el marco,
La peseta, valor de 4 reales y talla de 34 $^{3}/_{4}$ en el marco.
La media peseta, valor de 2 reales, talla 87 $^{1}/_{2}$ en el marco.
El real.

Artículo 4. El permiso en el peso para que el Gobierno apruebe ó desapruebe las rendiciones será:

ORO.

En los doblones de Isabel, de 10 granos mas ó menos por marco.

PLATA,

En los duros y escudos de 13 granos.
En las pesetas y medias de 25 granos.
En los reales de 46 granos.

Con respecto á los particulares, y á fin de admitir ó rebusar legalmente las monedas, el permiso será:

En el doblon de Isabel, de un grano de mas ó de menos.
En el duro 5 granos y 2 en el escudo.
En las pesetas y medias 1 $^1/_2$ granos.
En el real un grano.

Uno y otro permisos se entienden en mas ó en menos del peso.

Artículo 5.º El diámetro de las monedas será el siguiente:

ORO.

Del doblon de Isabel, 11 líneas y media.

PLATA.

Del duro, 20 lineas.
Del escudo, 15 líneas.
De la peseta, 12 lineas.
De la media, 9 lineus.
Del real, 8 lineas.

Articulo 6.º Las monedas de oro y plata se acuñarán en birola cerrada, á excepcion del duro y medio duro ó escudo que continuará con birola abierta, y conservará la leyenda de Ley, Patria y Rey establecida por la ley de 1.º de diciembre de 1836.

La posicion del busto de mi real persona y los emblemas serán diferentes en cada clase de moneda.

Articulo 7.º El descuento único que se hará en las casas de moneda para la compra de pastas será de uno por ciento en el oro y dos en la plata, pudiendo reducirlo el Gobierno cuando lo crea conveniente. Se publicarán en la *Gaceta* las tarifas á que se compren los metales preciosos en estas casas, siendo la afinacion y apartado de cuenta del vendedor. Los ensayos se harán por la via húmeda.

Las tarifas no podrán alterarse sin anunciarse con seis meses ó menos de anticipacion.

Articulo 8.º Las monedas de cobre que se acuñarán en adelante serán:

El medio real.
La décima de real.
La doble décima.
La media décima.

El diámetro de estas monedas será diferente del que tienen las de oro y plata; no tendrán mi real busto y llevarán impresos con letras su valor de medio real, décima de real, doble décima y media décima.

Articulo 9.º El órden de contabilidad para las oficinas del Estado y documentos públicos será el siguienie:

Doblon de Isabel.	Escudos.	Reales.	Décimas.
1 vale	10	100	1,000
	1 vale	10	100
		1 vale	10

Los duros, pesetas y mediaspesetas, el medio real, las dobles décimas y las medias décimas serán monedas auxiliares.

Articulo 10. Las monedas actuales de oro y plata, inclusas las de 19 reales, continuarán circulando legalmente por su valor nominal.

Articulo 11. Se establecerán en los puntos del reino que el Gobierno estime conveniente casas de moneda provistas de todos los medios necesarios para acuñarla con la mayor economia y perfeccion.

Se procederá igualmente á la refundicion de las monedas actuales siempre que el costo medio no esceda de un 10 por 100.

Articulo 12. Las monedas actuales de cobre se cambiarán con arreglo á la siguiente tarifa.

Un real por 8 $^1/_2$ cuartos ó 34 maravedises.
La media peseta por 17 cuartos.
La peseta por 34 cuartos.
El escudo por 85 cuartos.
El duro por 170 cuartos.

Articulo 13. Se dará cuenta á las Cortes en la próxima legislatura de las disposiciones del presente decreto para su aprobacion.

Dado en Palacio á 15 de abril de 1848.=Rubricado de la real mano.—El ministro de Hacienda, *Manuel Bertran de Lis.*

FIN DEL TOMO II.

INDICE DE MATERIAS DEL TOMO II.

ARITMETICA.

—

Primera parte.

ELEMENTOS DE CLCULO.— PRIMERA SECCION.—NUMEROS ENTEROS.

SECCION SEGUNDA.—DE LAS FRACCIONES COMUNES.

TERCERA SECCION.--DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

PÁGINAS.

SECCION CUARTA.—DE LAS POTENCIAS Y DE LAS RAICES DE LOS NUMEROS.

Segunda parte.

PRIMERA SECCION.—DIFERENTES MEDIDAS.

SEGUNDA SECCION.—CALCULO DE LOS NUMEROS CONCRETOS, INCOMPLEJOS Y COMPLEJOS.

PÁJINAS.

Tercera parte.

RESOLUCION DE PROBLEMAS POR EL METODO DE LA UNIDAD.—RAZONES Y PROPORCIONES.

PRIMERA SECCION. — METODO POR MEDIO DEL CUAL TODOS LOS PROBLEMAS DE LA ARITMÉTICA SE RESUELVEN POR LAS SOLAS COMBINACIONES DE LAS CUATRO REGLAS, O SEA MÉTODO DE LA UNIDAD.

SECCION SEGUNDA.—RAZONES Y PROPORCIONES Y SOLUCION DE VARIOS PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR SU MEDIO.

Nociones de Algebra.

Geometría.

GEOMETRIA PLANA.

PRIMERA SECCION.—DE LAS LINEAS.

PÁGINAS.

SEGUNDA SECCION.—DE LAS FIGURAS PLANAS FORMADAS POR MAS DE DOS LINEAS.

Segunda parte.